ATATÜRK ANADOLU LİSESİ

MATEMATİK

Karmaşık Sayılar
Üzerine Kısa Çalışmalar

KONYA \ SELÇUKLU ©2017

1 KARMAŞIK SAYILAR

1.1 Karmaşık Sayılar Kavramı

Denklemlerin, bazı kümelerde çözümleri bulunmamaktadır. $x+5=0$ denkleminin doğal sayılar kümesinde çözümü mevcut olmamasına rağmen tam, rasyonel ve gerçel sayılar kümesinde çözümü mevcuttur.

$x^2+9=0$ denkleminin çözüm kümesi ise her üç sayı kümesinde de mevcut değildir. Bu ve bunun gibi denklemlerin çözümünün yapılabilmesi için karmaşık sayılar kümesi geliştirilmiştir.

Karmaşık sayılarla verilen kurallar, alternatif akım elektroniğinin oluşumunda kısaca elektronikteki ilerlemelerin de temelini oluşturmuştur. Böylece geometrik toplamlar cebirsel toplamlar haline gelirken vektörel işlemler de skaler işlemler şekline dönüşmüştür.

1.1.1 Gerçel Sayılar Kümesinin Genişletilmesi

Gerçel sayılar kümesi üzerinden karmaşık sayılar kümesi tanımlanarak gerçel sayılar kümesi genişletilmiştir.

Tanım (KARMAŞIK SAYILAR)

$\mathbb{C}=\{(x,y)|\ x,y\in\mathbb{R}\}$ olmak üzere $\mathbb{C}$ kümesine ***karmaşık sayılar kümesi***, $\mathbb{C}$ nin her bir elemanına ***karmaşık sayı*** denir.

$(x,y)\in\mathbb{C}$ ise x sayısına karmaşık sayının ***gerçel kısmı***, y sayısına da ***sanal kısmı*** denir.

Bir karmaşık sayı $z=(x,y)$ ise z karmaşık sayısının gerçel kısmı $\mathrm{Ger}(z)=x$ ve sanal kısmı $\mathrm{San}(z)=y$ biçiminde ifade edilir.

Örnek 1: $\left(\frac{a}{a-1},\frac{1}{b}\right)$ sıralı ikilisinin bir karmaşık sayı olması için a ve b yi bulunuz.

Yanıt 1:

$\frac{a}{a-1}$ ve $\frac{1}{b}$ kesirlerinin tanımsız olduğu noktalar: $a\neq1$ ve $b\neq0$ dir. Dolayısıyla,

$a\in\mathbb{R}-\{1\}$ ve $b\in\mathbb{R}-\{0\}$ olduğu takdirde $\left(\frac{a}{a-1},\frac{1}{b}\right)$ sıralı ikilisi bir karmaşık sayıdır.

ALIŞTIRMALAR

1. Birbirinden farklı 7 karmaşık sayı bulunuz.
2. $\left(-\frac{1}{a},3\right)$ sıralı ikilisinin bir karmaşık olabilmesi için a sayısının alması gereken değerleri bulunuz.
3. $\left(\frac{1}{5-a},3\right)$ sıralı ikilisinin bir karmaşık olabilmesi için a sayısının alması gereken değerleri bulunuz.
4. $(\cos 60^\circ,\ \sin 30^\circ)$ karmaşık sayısının eşiti hangi karmaşık sayıdır?

1.2 İki Karmaşık Sayının Eşitliği

> ***Tanım (KARMAŞIK SAYILARIN EŞİTLİĞİ)***
> Herhangi iki karmaşık sayı $z_1=(x,y)$ ve $z_2=(u,v)$ olmak üzere
>
> $$z_1=z_2 \quad \Leftrightarrow \quad (x=u \quad \text{ve} \quad y=v)$$
>
> dir.

Örnek 1: $z=(1-x,y-2)$ ve $w=(-2,6-y)$ karmaşık sayıları eşit ise $x+y$ kaçtır?

Yanıt 1:

$$\begin{aligned} z=w &\Leftrightarrow (1-x,y-2)=(-2,6-y) \\ &\Leftrightarrow 1-x=-2 \quad \text{ve} \quad y-2=6-y \\ &\Leftrightarrow x=1+2 \quad \text{ve} \quad 2y=6+2 \\ &\Leftrightarrow x=3 \quad \text{ve} \quad y=4 \end{aligned}$$

Bu durumda, $x+y=7$ dir.

ALIŞTIRMALAR

1. $(1-x,\ 3-y)=(y-5,\ 4-x)$ ise bu karmaşık sayılar için x ve y nedir?	2. $(e^{x+y},3)=(1,x-y)$ ise bu karmaşık sayılar için $\frac{x}{y}$ kaçtır?

1.3 Karmaşık Sayılar Kümesinde İşlemler

Karmaşık sayılar kümesindeki işlemler:

1. **Toplama İşlemi**
2. **Çıkarma İşlemi**
3. **Çarpma İşlemi**
4. **Bölme İşlemi**

1.3.1 Toplama İşlemi

> ***Tanım (TOPLAMA İŞLEMİ)***
> Karmaşık sayılar kümesinde
>
> $$+:\mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$$
> $$+:((x,y),\ (u,v))\to(x+u,\ y+v)$$
>
> şeklinde tanımlanan $+$ işlemine ***toplama işlemi*** denir.

Örnek 1: $(3,-5)$ ve $(4,7)$ karmaşık sayılarının toplamını bulunuz.

Yanıt 1:
$(3,-5)+(4,7)\;=(3+4,-5+7)\;=(7,2)$

Örnek 2: $z=(1-x,y-2)$ ve $w=(-2+x,6-y)$ karmaşık sayıları ise $z+w$ nedir?

Yanıt 2:
$z=(1-x,y-2)$ ve $w=(-2+x,6-y)$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\quad z+w &=(1-x,y-2)+(-2+x,6-y)\\
\Rightarrow\quad &=(1-x+(-2+x),y-2+(6-y))\\
\Rightarrow\quad &=(1-x-2+x,y-2+6-y)\\
\Rightarrow\quad &=(-1,4)
\end{aligned}$$

ALIŞTIRMALAR

1. $(-13,-5)$ ve $(24,57)$ karmaşık sayılarının toplamını bulunuz.
2. $(3-x+y,y-5)$ ve $(4+x-y,7-y)$ karmaşık sayılarının toplamını bulunuz.
3. $(3,5)$ ve $(-24,-57)$ karmaşık sayılarının toplamını bulunuz.
4. $(5+x-y,y+5-x)$ ve $(4-x+y,7+x-y)$ karmaşık sayılarının toplamını bulunuz.

1.3.2 Çıkarma İşlemi

Tanım (ÇIKARMA İŞLEMİ)
$z_1,\ z_2\in\mathbb{C}$ olmak üzere

$$z_1+(-z_2)$$

sayısına z_1 in z_2 den ***farkı*** denir. Bu fark z_1-z_2 biçiminde gösterilir.

Örnek 1: $(3,-5)$ ve $(4,7)$ karmaşık sayılarının farkını bulunuz.

Yanıt 1:

$$\begin{aligned}
(3,-5)-(4,7)\; &=(3,-5)+\left[-(4,7)\right]\\
&=(3,-5)+(-4,-7)\\
&=(3-4,-5-7)\\
&=(-1,-12)
\end{aligned}$$

Örnek 2: $z=(1+x,-y-2)$ ve $w=(-2+x,6-y)$ karmaşık sayıları ise $z-w$ nedir?

Yanıt 2:
$z=(1+x,-y-2)$ ve $w=(-2+x,6-y)$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\quad z-w &=(1+x,-y-2)-(-2+x,6-y)\\
\Rightarrow\quad &=(1+x-(-2+x),-y-2-(6-y))\\
\Rightarrow\quad &=(1-x+2-x,-y-2-6+y)\\
\Rightarrow\quad &=(3,-8)
\end{aligned}$$

Örnek 3: $(3,-5)$ ve $(-9,-7)$ karmaşık sayılarının farkını bulunuz.

Yanıt 3:

$$\begin{aligned}(3,-5)-(-9,-7) &= (3,-5)+\left[-(-9,-7)\right]\\ &= (3,-5)+(9,7)\\ &= (3+9,-5+7) = (12,2)\end{aligned}$$

ALIŞTIRMALAR

1. $(-13,-5)$ ve $(24,57)$ karmaşık sayılarının farkını bulunuz.
2. $(3-x+y, y-5)$ ve $(4+x-y, 7-y)$ karmaşık sayılarının farkını bulunuz.
3. $(13,5)$ ve $(24,-57)$ karmaşık sayılarının farkını bulunuz.
4. $(3+x+y, y-5+x)$ ve $(4+x-y, 7-y+x)$ karmaşık sayılarının farkını bulunuz.

1.3.3 Çarpma İşlemi

Tanım (ÇARPMA İŞLEMİ)

Karmaşık sayılar kümesinde

$\cdot : \mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$

$\cdot : \big((x,y),\ (u,v)\big)\to(xu-yv,\ xv+yu)$

şeklinde tanımlanan $\cdot$ işlemine ***çarpma işlemi*** denir.

Örnek 1: $(3,-5)$ ve $(4,7)$ karmaşık sayılarının çarpımını bulunuz.

Yanıt 1:

$$\begin{aligned}(3,-5)\cdot(4,7) &= (3\cdot 4-(-5)\cdot 7,\ 3\cdot 7+(-5)\cdot 4)\\ &= (12-(-35),\ 21+(-20))\\ &= (12+35,\ 21-20)\\ &= (47,1)\end{aligned}$$

Örnek 2: $(-3,-5)$ ve $(-4,7)$ karmaşık sayılarının çarpımını bulunuz.

Yanıt 2:

$$\begin{aligned}(-3,-5)\cdot(-4,7) &= \big(-3(-4)-(-5)\cdot 7,(-3)\cdot 7+(-5)\cdot(-4)\big)\\ &= \big(12-(-35),-21+(-20)\big)\\ &= \big(12+35,-21-20\big)\\ &= \big(47,-41\big)\end{aligned}$$

ALIŞTIRMALAR

1. $(-13,-5)$ ve $(24,57)$ karmaşık sayılarının çarpımını bulunuz.
2. $(3-x+y, y-5)$ ve $(4+x-y, 7-y)$ karmaşık sayılarının çarpımını bulunuz.
3. $(3,5)$ ve $(0,1)$ karmaşık sayılarının çarpımını bulunuz.
4. $(3,0)$ ve $(0,1)$ karmaşık sayılarının çarpımını bulunuz.

1.3.4 Bölme İşlemi

Tanım (BÖLME İŞLEMİ)

$z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$ ve $z_2 \neq 0$ olmak üzere

$$z_1 \cdot z_2^{-1}$$

sayısına z_1 in z_2 ye ***bölümü*** denir. Bu bölüm $\frac{z_1}{z_2}$ biçiminde gösterilir

Burada bir karmaşık sayının çarp işlemine göre tersinin tanımı yapılacaktır.

1.3.4.1 Bir Karmaşık Sayının Çarpma İşlemine Göre Tersi

Tanım (BÖLME İŞLEMİ)

$z = (a, b) \in \mathbb{C}$ ve $z \neq 0$ olmak üzere

$$z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right)$$

sayısına z nin çarpma işlemine göre tersi denir ve z^{-1} biçiminde gösterilir

Örnek 1: $z = (3, -5)$ karmaşık sayısının tersini bulunuz.

Yanıt 1:

$$z = (3,-5) \quad \Rightarrow \quad z^{-1} = \left(\frac{3}{3^2 + (-5)^2}, -\frac{5}{3^2 + (-5)^2} \right)$$

$$\Rightarrow \quad z^{-1} = \left(\frac{3}{9 + 25}, -\frac{5}{9 + 25} \right)$$

$$\Rightarrow \quad z^{-1} = \left(\frac{3}{34}, -\frac{5}{34} \right)$$

Örnek 2: $w = (3, 4)$ karmaşık sayısının tersini bulunuz.

Yanıt 2:

$$w = (3,4) \quad \Rightarrow \quad w^{-1} = \left(\frac{3}{3^2 + 4^2}, -\frac{4}{3^2 + 4^2} \right)$$

$$\Rightarrow \quad w^{-1} = \left(\frac{3}{9 + 16}, -\frac{4}{9 + 16} \right)$$

$$\Rightarrow \quad w^{-1} = \left(\frac{3}{25}, -\frac{4}{25} \right)$$

Örnek 3: $(3, -5)$ ve $(4, 7)$ karmaşık sayılarının bölümünü bulunuz.

Yanıt 3:

$$\frac{(3,-5)}{(4,7)}=(3,-5)\cdot\frac{1}{(4,7)}=(3,-5)\cdot(4,7)^{-1}$$

$$=(3,-5)\cdot\left(\frac{4}{4^2+7^2},-\frac{7}{4^2+7^2}\right)$$

$$=(3,-5)\cdot\left(\frac{4}{16+49},-\frac{7}{16+49}\right)$$

$$=(3,-5)\cdot\left(\frac{4}{65},-\frac{7}{65}\right)$$

$$=\left(3\cdot\frac{4}{65}-(-5)\cdot\left(-\frac{7}{65}\right),3\cdot\left(-\frac{7}{65}\right)+(-5)\cdot\frac{4}{65}\right)$$

$$=\left(\frac{12}{65}-\frac{7}{13},-\frac{21}{65}-\frac{4}{13}\right)$$

$$=\left(-\frac{23}{65},-\frac{41}{65}\right)$$

Örnek 4: $z=(1,2)$ ve $w=(2,6)$ karmaşık sayıları için $\frac{z}{w}$ kaçtır?

Yanıt 4:

$$\frac{z}{w}=\frac{(1,2)}{(2,6)}=(1,2)\cdot(2,6)^{-1}$$

$$=(1,2)\cdot\left(\frac{2}{2^2+6^2},-\frac{6}{2^2+6^2}\right)$$

$$=(1,2)\cdot\left(\frac{2}{40},-\frac{6}{40}\right)$$

$$=(1,2)\cdot\left(\frac{1}{20},-\frac{3}{20}\right)$$

$$=\left(1\cdot\frac{1}{20}-2\cdot\frac{-3}{20},1\cdot\frac{-3}{20}+2\cdot\frac{1}{20}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{20}+\frac{6}{20},\frac{-3}{20}+\frac{2}{20}\right)$$

$$=\left(\frac{7}{20},-\frac{1}{20}\right)$$

ALIŞTIRMALAR

1. $\frac{(1,-1)}{(1,-2)}$ işleminin sonucu nedir?	3. $\frac{(2,3)}{(1,-1)}+(0,1)$ işleminin sonucu nedir?
2. $z=(-1,2)$ ve $w=(5,6)$ karmaşık sayıları için $\frac{z}{w}$ kaçtır?	4. $z=(12,5)$ ve $w=(-2,5)$ karmaşık sayıları için $\frac{z}{w}$ kaçtır?

1.4 Grup

Bir matematik yapısının Grup $(\mathbb{C},+)$ olabilmesi için

G1: Kapalılık özeliği
G2: Birleşme özeliği
G3: Birim eleman özeliği
G4: Ters eleman özeliği

bu dört belit sağlanırsa yapı Grup $(\mathbb{C},+)$ olur.

G5: Değişme özeliği

belitinin sağlanması ile yapı Değişmeli Grup $(\mathbb{C},+)$ olur.

Teorem
Karmaşık sayılar kümesi toplama işlemine göre değişmeli bir gruptur. Yani $(\mathbb{C},+)$ matematik yapısı değişmeli gruptur.

İspat:
Grup belitlerini göstermek teoremin ispatı için gerektir ve yeterdir. Değişmeli grup için

G1: Kapalılık özeliği
G2: Birleşme özeliği
G3: Birim eleman özeliği
G4: Ters eleman özeliği
G5: Değişme özeliği

belitlerini ispatlayalım.

G1: Kapalılık özeliği:

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \quad \Rightarrow \quad z_1 + z_2 \in \mathbb{C}$$

önermesinin doğru olması gerekir.

$$z_1 = (a,b) \ \text{ ve } \ z_2 = (c,d) \ \text{ ise } \ z_1 + z_2 = (a,b) + (c,d) \ = (a+c,\ b+d)$$

$a+c \in \mathbb{R}$ ve $b+d \in \mathbb{R}$ olduğundan $z_1 + z_2 \in \mathbb{C}$ dir.

$\mathbb{C}$, toplama işlemine göre kapalıdır.

G2: Birleşme özeliği:

$$\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} \quad \Rightarrow \quad (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$$

önermesinin doğru olması gerekir.

$$z_1 = (a,b),\ z_2 = (c,d) \ \text{ ve } \ z_3 = (e,f) \ \text{ ise } \ (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \ \text{ olacaktır.}$$

$$
\begin{aligned}
(z_1+z_2)+z_3 &= \big[(a,b)+(c,d)\big]+(e,f) &&= \big[(a+c,b+d)\big]+(e,f)\\
&= \big((a+c)+e,\ (b+d)+f\big) &&= \big(a+(c+e),\ b+(d+f)\big)\\
&= (a,b)+(c+e,\ d+f) &&= z_1+(z_2+z_3)
\end{aligned}
$$

G3: Birim eleman özeliği:

$\mathbb{C}$ nin toplama işlemine göre birim elemanı vardır. Bu birim eleman $(0,0)$ dır.

$\forall z=(a,b)\in\mathbb{C}$ için

$(a,b)+(0,0)=(a+0,b+0)=(a,b)$ | $(0,0)+(a,b)=(0+a,0+b)=(a,b)$

G4: Ters eleman özeliği:

$\forall z=(a,b)\in\mathbb{C}$ karmaşık sayısının toplama işlemine göre bir tersi vardır. Bu ters eleman $(-a,-b)$ dir.

$\forall z_1=(a,b),\ z_2=(u,v)\in\mathbb{C}$ için

$$
\begin{aligned}
z_1+z_2=(0,0) &\Rightarrow (a,b)+(u,v)=(0,0)\\
&\Rightarrow (a+u,\ b+v)=(0,0)\\
&\Rightarrow a+u=0 \ \text{ ve } \ b+v=0\\
&\Rightarrow u=-a \ \text{ ve } \ v=-b\\
&\Rightarrow z_2=(u,v)=(-a,-b)
\end{aligned}
$$

$z_1=(a,b)$ karmaşık sayısının toplama işlemine göre tersi $z_2=(-a,-b)$ dir.

G5: Değişme özeliği:

$\mathbb{C}$ nin toplama işlemine göre değişme özeliği vardır.

$\forall z_1=(a,b),\ z_2=(c,d)\in\mathbb{C}$ için

$$
\begin{aligned}
z_1+z_2 = (a,b)+(c,d) &= (a+c,b+d)\\
&= (c+a,d+b)\\
&= (c,d)+(a,b)\\
&= z_2+z_1
\end{aligned}
$$

Örnek 1: $(3,-5)$ ve $(4,7)$ karmaşık sayılarının toplamını bulunuz.

Yanıt 1:
$(3,-5)+(4,7)=(3+4,\ -5+7)=(7,\ 2)$ veya
$(4,7)+(3,-5)=(4+3,\ 7+(-5))=(7,\ 2)$

Örnek 2: $(3,-5)$ ve $(4,7)$ karmaşık sayılarının toplama işlemine göre tersi olan karmaşık sayıları bulunuz.

Yanıt 2:
$(3,-5)$ karmaşık sayısının toplama işlemine göre tersi : $=-(3,-5)\ =(-3,5)$

$(4,7)$ karmaşık sayısının toplama işlemine göre tersi : $=-(4,7)\ =(-4,-7)$

ALIŞTIRMALAR

1. $(-3,5)+(-4,-7)$ toplamının sonucu nedir?	2. $(-4,-7)$ toplama işlemine göre tersi nedir?

1.5 Cisim

Bir matematik yapısının Cisim $(\mathbb{C},+,\cdot)$ olabilmesi için

G1: Kapalılık özeliği	***Ç1: Kapalılık özeliği***
G2: Birleşme özeliği	***Ç2: Birleşme özeliği***
G3: Birim eleman özeliği	***Ç3: Birim eleman özeliği***
G4: Ters eleman özeliği	***Ç4: Ters eleman özeliği***
G5: Değişme özeliği	***Ç5: Değişme özeliği***
	Ç6: Dağılma özeliği

belitlerin sağlanması ile yapı Cisim $(\mathbb{C},+,\cdot)$ olur.

Grup belitlerinde toplama işlemi, Cisim belitlerinde ise toplama (Grup) ve çarpma işlemleri kullanılmaktadır.

Teorem
Karmaşık sayılar kümesi toplama ve çarpma işlemlerine göre bir cisimdir. Yani, $(\mathbb{C},+,\cdot)$ matematik yapısı bir cisimdir.

İspat:
Cisim $(\mathbb{C},+,\cdot)$ belitlerini göstermek teoremin ispatı için gerektir ve yeterdir.

Grup $(\mathbb{C},+)$ için G1: Kapalılık özeliği, G2: Birleşme özeliği, G3: Birim eleman özeliği, G4: Ters eleman özeliği, G5: Değişme özeliği belitleri sayfa 5 de.

1.5.1 Çarpma İşlemi

Tanım (ÇARPMA İŞLEMİ)
Karmaşık sayılar kümesinde
$\cdot:\mathbb{C}\times\mathbb{C}\rightarrow\mathbb{C}$
$\cdot:\big((x,y),\ (u,v)\big)\rightarrow(xu-yv,\ xv+yu)$
şeklinde tanımlanan $\cdot$ işlemine ***çarpma işlemi*** denir.

Örnek 1: $(3,-5)$ ve $(4,7)$ karmaşık sayılarının çarpımını bulunuz.

Yanıt 1:
$(3,-5)\cdot(4,7)\ =(3\cdot 4-(-5)\cdot 7,\ 3\cdot 7+(-5)\cdot 4)$

$$=(12-(-35),\ 21+(-20))$$
$$=(12+35,\ 21-20)$$
$$=(47,1)$$

Örnek 2: $(-3,-5)$ ve $(-4,7)$ karmaşık sayılarının çarpımını bulunuz.

Yanıt 2:

$$(-3,-5)\cdot(-4,7) = \left(-3(-4)-(-5)\cdot 7,(-3)\cdot 7+(-5)\cdot(-4)\right)$$
$$=\left(12-(-35),-21+(-20)\right)$$
$$=\left(12+35,-21-20\right)$$
$$=\left(47,-41\right)$$

ALIŞTIRMALAR

5. $(-13,-5)$ ve $(24,57)$ karmaşık sayılarının çarpımını bulunuz.
6. $(3-x+y,y-5)$ ve $(4+x-y,7-y)$ karmaşık sayılarının çarpımını bulunuz.
7. $(3,5)$ ve $(0,1)$ karmaşık sayılarının çarpımını bulunuz.
8. $(3,0)$ ve $(0,1)$ karmaşık sayılarının çarpımını bulunuz.

1.5.2 Bölme İşlemi

Tanım (BÖLME İŞLEMİ)

$z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$ ve $z_2 \neq 0$ olmak üzere

$$z_1 \cdot z_2^{-1}$$

sayısına z_1 in z_2 ye ***bölümü*** denir. Bu bölüm $\frac{z_1}{z_2}$ biçiminde gösterilir

Burada bir karmaşık sayının çarp işlemine göre tersinin tanımı yapılacaktır.

1.5.2.1 Bir Karmaşık Sayının Çarpma İşlemine Göre Tersi

Tanım (BÖLME İŞLEMİ)

$z=(a,b)\in\mathbb{C}$ ve $z\neq 0$ olmak üzere

$$z^{-1}=\left(\frac{a}{a^2+b^2},-\frac{b}{a^2+b^2}\right)$$

sayısına z nin çarpma işlemine göre tersi denir ve z^{-1} biçiminde gösterilir

Örnek 1: $z=(3,-5)$ karmaşık sayısının tersini bulunuz.

Yanıt 1:

$$z=(3,-5) \quad \Rightarrow \quad z^{-1}=\left(\frac{3}{3^2+(-5)^2},-\frac{5}{3^2+(-5)^2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad z^{-1}=\left(\frac{3}{9+25},-\frac{5}{9+25}\right)$$

$$\Rightarrow \quad z^{-1}=\left(\frac{3}{34},-\frac{5}{34}\right)$$

Örnek 2: $w=(3,4)$ karmaşık sayısının tersini bulunuz.

Yanıt 2:

$$w=(3,4) \quad \Rightarrow \quad w^{-1}=\left(\frac{3}{3^2+4^2},-\frac{4}{3^2+4^2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad w^{-1}=\left(\frac{3}{9+16},-\frac{4}{9+16}\right)$$

$$\Rightarrow \quad w^{-1}=\left(\frac{3}{25},-\frac{4}{25}\right)$$

Örnek 3: $(3,-5)$ ve $(4,7)$ karmaşık sayılarının bölümünü bulunuz.

Yanıt 3:

$$\frac{(3,-5)}{(4,7)} = (3,-5)\cdot\frac{1}{(4,7)} = (3,-5)\cdot(4,7)^{-1}$$

$$=(3,-5)\cdot\left(\frac{4}{4^2+7^2},-\frac{7}{4^2+7^2}\right)$$

$$=(3,-5)\cdot\left(\frac{4}{16+49},-\frac{7}{16+49}\right)$$

$$=(3,-5)\cdot\left(\frac{4}{65},-\frac{7}{65}\right)$$

$$=\left(3\cdot\frac{4}{65}-(-5)\cdot\left(-\frac{7}{65}\right),3\cdot\left(-\frac{7}{65}\right)+(-5)\cdot\frac{4}{65}\right)$$

$$=\left(\frac{12}{65}-\frac{7}{13},-\frac{21}{65}-\frac{4}{13}\right)$$

$$=\left(-\frac{23}{65},-\frac{41}{65}\right)$$

Örnek 4: $z=(1,2)$ ve $w=(2,6)$ karmaşık sayıları için $\frac{z}{w}$ kaçtır?

Yanıt 4:

$$\frac{z}{w} = \frac{(1,2)}{(2,6)} = (1,2)\cdot(2,6)^{-1}$$

$$=(1,2)\cdot\left(\frac{2}{2^2+6^2},-\frac{6}{2^2+6^2}\right)$$

$$=(1,2)\cdot\left(\frac{2}{40},-\frac{6}{40}\right)$$

$$=(1,2)\cdot\left(\frac{1}{20},-\frac{3}{20}\right)$$

$$=\left(1\cdot\frac{1}{20}-2\cdot\frac{-3}{20},1\cdot\frac{-3}{20}+2\cdot\frac{1}{20}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{20}+\frac{6}{20},\frac{-3}{20}+\frac{2}{20}\right)$$

$$=\left(\frac{7}{20},-\frac{1}{20}\right)$$

ALIŞTIRMALAR

5. $\frac{(1,-1)}{(1,-2)}$ işleminin sonucu nedir?

6. $z=(-1,2)$ ve $w=(5,6)$ karmaşık sayıları için $\frac{z}{w}$ kaçtır?

7. $\frac{(2,3)}{(1,-1)}+(0,1)$ işleminin sonucu nedir?

8. $z=(12,5)$ ve $w=(-2,5)$ karmaşık sayıları için $\frac{z}{w}$ kaçtır?

Grup konusunda ispatlanmıştır.

Aşağıda Cisim $(\mathbb{C},+,\cdot)$ için verilen çarpma işlemi belitleri ispatlanmıştır.

Ç1: Kapalılık özeliği

$$\forall z_1,z_2\in\mathbb{C}\quad\Rightarrow\quad z_1\cdot z_2\in\mathbb{C}$$

önermesinin doğru olması gerekir.

$z_1=(a,b)$ ve $z_2=(c,d)$ ise $z_1\cdot z_2=(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,\ ad+bc)$

$ac-bd\in\mathbb{R}$ ve $ad+bc\in\mathbb{R}$ olduğundan $z_1+z_2\in\mathbb{C}$ dir. $\mathbb{C}$, çarpma işlemine göre kapalıdır.

Ç2: Birleşme özeliği

$$\forall z_1,z_2,z_3\in\mathbb{C}\quad\Rightarrow\quad(z_1\cdot z_2)\cdot z_3=z_1\cdot(z_2\cdot z_3)$$

önermesinin doğru olması gerekir.

$z_1=(a,b)$, $z_2=(c,d)$ ve $z_3=(e,f)$ ise $(z_1\cdot z_2)\cdot z_3=z_1\cdot(z_2\cdot z_3)$ olacaktır. Bu duruma göre;

$$(z_1\cdot z_2)\cdot z_3=\big((a,b)\cdot(c,d)\big)\cdot(e,f)$$
$$=(ac-bd,ad+bc)\cdot(e,f)$$
$$=\big((ac-bd)e-(ad+bc)f,(ac-bd)f+(ad+bc)e\big)$$
$$=\big(ace-bde-adf-bcf,acf-bdf+ade+bce\big)$$

$$z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (a,b) \cdot \big((c,d) \cdot (e,f)\big)$$
$$= (a,b) \cdot (ce - df, cf + de)$$
$$= \big(a(ce - df) - b(cf + de), a(cf + de) + b(ce - df)\big)$$
$$= \big(ace - adf - bcf - bde, acf + ade + bce - bdf\big)$$

Buradan $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$ olduğundan $\mathbb{C}$ nin çarpma işlemine göre birleşme özeliği vardır.

Ç3: Birim eleman özeliği

$\mathbb{C}$ nin çarpma işlemine göre birim elemanı vardır. Bu birim eleman $(1,0)$ dır.

$\forall z = (a,b) \in \mathbb{C}$ için

$$(a,b) \cdot (1,0) = (a \cdot 1 + b \cdot 0, a \cdot 0 + b \cdot 1) = (a,b)$$
$$(1,0) \cdot (a,b) = (1 \cdot a - 0 \cdot b, 1 \cdot b + 0 \cdot a) = (a,b)$$

Ç4: Ters eleman özeliği

$\forall z = (a,b) \neq (0,0) \in \mathbb{C}$ karmaşık sayısının çerpma işlemine göre bir tersi vardır. Bu ters eleman $\left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right)$ dir.

$\forall z_1 = (a,b), z_2(x,y) \in \mathbb{C}$ için

$$(a,b) \cdot (x,y) = (1,0) \quad \Rightarrow \quad (ax - by, ay + bx) = (1,0)$$
$$(x,y) \cdot (a,b) = (1,0) \quad \Rightarrow \quad (xa - yb, ya + xb) = (1,0)$$

Karmaşık sayıların eşitliğinden

$$\begin{aligned} ax - by &= 1 \\ ay + bx &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{a}{a^2+b^2} \quad \text{ve} \quad y = -\frac{b}{a^2+b^2}$$

Ters eleman $(x,y) = \left(\frac{a}{a^2+b^2} - -\frac{b}{a^2+b^2}\right)$ dir.

$\mathbb{C}$ de $(0,0)$ karmaşık sayısı hariç tüm karmaşık sayıların çarpma işlemine göre tersi vardır.

Ç5: Değişme özeliği

$\mathbb{C}$ nin çarpma işlemine göre değişme özeliği vardır.

$\forall z_1 = (a,b), z_2(c,d) \in \mathbb{C}$ için

$$\begin{aligned} (a,b) \cdot (c,d) &= (ac - bd, ad + bc) \\ &= (ca - db, da + cb) \\ &= (c,d) \cdot (a,b) \end{aligned}$$

Ç6: Dağılma özeliği

$\mathbb{C}$ de çarpma işleminin toplama işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılma özeliği vardır.

$\forall z_1=(a,b), z_2(c,d), z_3=(e,f)\in\mathbb{C}$ için

$$\begin{aligned}
z_1\cdot(z_2+z_3) &= (a,b)\cdot\big[(c,d)+(e,f)\big]\\
&= (a,b)\cdot\big[(c+e,d+f)\big]\\
&= \big(a(c+e)-b(d+f),\ b(c+e)+a(d+f)\big)\\
&= (ac+ae-bd-bf,\ ad+af+bc+be)\\
&= (ac-bd+ae-bf,\ bc+ad+af+be)\\
&= (ac-bd,\ bc+ad)+(ae-bf,\ af+be)\\
&= (a,b)\cdot(c,d)+(a,b)\cdot(e,f)\\
&= z_1\cdot z_2+z_1\cdot z_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(z_2+z_3)\cdot z_1 &= \big[(c,d)+(e,f)\big]\cdot(a,b)\\
&= \big[(c+e,d+f)\big]\cdot(a,b)\\
&= \big((c+e)a-(d+f)b,\ (c+e)b+(d+f)a\big)\\
&= (ca+ea-db-fb,\ cb+eb+da+fa)\\
&= (ca-db+ea-fb,\ cb+da+fa+eb)\\
&= (ca-db,\ cb+da)+(ea-fb,\ fa+eb)\\
&= (a,b)\cdot(c,d)+(a,b)\cdot(e,f)\\
&= z_1\cdot z_2+z_1\cdot z_3
\end{aligned}$$

Böylece $\mathbb{C}$ nin bir Cisim $(\mathbb{C},+,\cdot)$ olduğu ispatlanmış olur.

Örnek 1: $(1,-5)$ karmaşık sayısının tersini bulunuz.

Yanıt 1:
$z=(a,b)$ karmaşık sayısının tersi $w=(u,v)$ olsun. Buna göre

$$\begin{aligned}
w=(u,v) &= \left(\frac{a}{a^2+b^2},-\frac{b}{a^2+b^2}\right)\\
&= \left(\frac{1}{1^2+(-5)^2},-\frac{-5}{1^2+(-5)^2}\right)\\
&= \left(\frac{3}{1+25},\frac{5}{1+25}\right)\\
&= \left(\frac{3}{26},\frac{5}{26}\right)
\end{aligned}$$

ALIŞTIRMALAR

1. $(-2,7)$ karmaşık sayısının tersini bulunuz.
2. $(-12,0)$ karmaşık sayısının tersini bulunuz.

1.6 Sadeleştirme

Teorem
$z,\ w\neq 0,\ v\neq 0\in\mathbb{C}$ ise $\dfrac{z\cdot v}{w\cdot v}=\dfrac{z}{w}$ dir.

İspat:

$$\begin{aligned}\frac{z\cdot v}{w\cdot v} &= (z\cdot v)\frac{1}{w\cdot v}\\ &= (z\cdot v)(w\cdot v)^{-1}\\ &= (z\cdot v)(w^{-1}\cdot v^{-1})\\ &= (z\cdot v)(v^{-1}\cdot w^{-1})\\ &= z\cdot(v\cdot v^{-1})\cdot w^{-1}\\ &= z\cdot w^{-1}\\ &= \frac{z}{w}\end{aligned}$$

Örnek 1: $\dfrac{(3,-5)\cdot(9,7)}{(3,5)\cdot(9,7)}$ karmaşık sayısını sadeleştiriniz.

Yanıt 1:

$$\begin{aligned}\frac{(3,-5)\cdot(9,7)}{(3,5)\cdot(9,7)} &= \frac{(3,-5)}{(3,5)}\\ &= (3,-5)\left(\frac{3}{34},-\frac{5}{34}\right)\\ &= \left(\frac{9}{34}-\frac{25}{34},-\frac{15}{34}-\frac{15}{34}\right)\\ &= \left(-\frac{8}{17},-\frac{15}{17}\right)\end{aligned}$$

ALIŞTIRMALAR

3. $\dfrac{(-3,5)\cdot(3,4)}{(3,5)\cdot(3,4)}$ karmaşık sayısını sadeleştiriniz.	4. $\dfrac{(-4,3)\cdot(5,7)}{(3,5)\cdot(5,7)}$ karmaşık sayısını sadeleştiriniz.

1.7 Gerçel ve Karmaşık Sayılar Arasındaki İlişki

İkinci bileşenleri sıfır olan, $(x,0)$ karmaşık sayılar kümesini $\mathbb{C}^*$ ile belirtelim.

$$\mathbb{C}^* = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

dir. $\mathbb{C}^*$ toplama ve çarpma işlemlerine göre bir cisim $(\mathbb{C}^*,+,\cdot)$ olamaya devam eder. Sayfa 10 deki 1.5 Cisim konusundaki teorem ve ispatı ile ispatlanabilir. Matematik yapısı Gerçel sayılar kümesinin de Cisim $(\mathbb{R},+,\cdot)$ olduğu biliniyor. Bu iki Cisim arasındaki ilişki tanımlanırsa:

$$f:\mathbb{C}^* \to \mathbb{R}$$
$$f:(x,0) \to x$$

buna göre toplama, çarpma ve fonksiyonun birebir ve örten fonksiyon olma özeliklerini verelim.

i. $(a,0),(b,0)\in\mathbb{C}^*$ için $(a,0)+(b,0)$ ve $(a+b,0)$ elemanlarının f ile elde edilecek görüntüsü $a+b$ dir.

$$f\big((a,0)+(b,0)\big)=a+b$$

ii. $f\big((a,0)\cdot(b,0)\big)=a\cdot b$

iii. f fonksiyonu birebir ve örten fonksiyondur.

İki sistem arasında işlem-koruyan (homomorfizm) bir fonksiyon varsa ve bu fonksiyon aynı zaman da birebir ve örten (izomorf) ise bu iki sistem birbirine denk olur. Bu durumda herhangi bir önerme biri için doğru ise diğeri için de doğrudur. Buna göre

$$(x,0) \text{ ile } x$$

aynı sayının iki farklı gösteriminden başka bir şey değildir.

Örnek 1: $(-3,0)$, $(1,0)$, $(0,0)$, $\left(\frac{1}{3},0\right)$ ve $\left(\sqrt{2},0\right)$ karmaşık sayılarının hangi gerçel sayılara eşit olduklarını bulunuz.

Yanıt 1:

$(-3,0)=-3$, $(1,0)=1$, $(0,0)=0$, $\left(\frac{1}{3},0\right)=\frac{1}{3}$, $\left(\sqrt{2},0\right)=\sqrt{2}$

ALIŞTIRMALAR

1. $(3,0)$, $(-1,0)$, $(0,0)$, $\left(-\frac{1}{3},0\right)$ ve $\left(-\sqrt{2},0\right)$ karmaşık sayılarının hangi gerçel sayılara eşit olduklarını bulunuz.

2. $(-7,0)$, $(10,0)$, $(0,0)$, $\left(\frac{9}{13},0\right)$ ve $\left(\sqrt{16},0\right)$ karmaşık sayılarının hangi gerçel sayılara eşit olduklarını bulunuz.

1.8 Karmaşık Sayıların Normal Biçimi

Euler Leonhard (1707 - 1783) tarafından matematiğe kazandırılan i sayısı tanımlanacak ve özelikleri verilecektir.

Tanım (I SAYISI)

$(0,1)=i$

dir.

Teorem

$i^2=-1$

dir.

İspat:

$$i^2 = i\cdot i = (0,1)\cdot(0,1)$$
$$= (0\cdot 0 - 1\cdot 1, 0\cdot 1 + 1\cdot 0)$$
$$= (-1,0) = -1$$

Örnek 1: $\sqrt{-4}$ ve $\sqrt{-20}$ ifadelerinin eşitlerini bulunuz.

Yanıt 1:

$$\sqrt{-4} = \sqrt{-1\cdot 4} = \sqrt{i^2\cdot 4} = \sqrt{i^2}\cdot\sqrt{4} = i\cdot 2 = 2\cdot i$$

$$\sqrt{-20} = \sqrt{-1\cdot 20} = \sqrt{i^2\cdot 20} = \sqrt{i^2}\cdot\sqrt{4\cdot 5} = \sqrt{i^2}\cdot\sqrt{2^2\cdot 5} = 2\sqrt{5}\cdot i$$

Örnek 2: i^5 ve $i^7 + i^{12}$ ifadelerinin eşitlerini bulunuz.

Yanıt 2:

$$i^5 = i^{2\cdot 2+1} = \left(i^2\right)^2\cdot i = (-1)^2\cdot i = 1\cdot i = i$$

$$i^7 + i^{12} = i^{3\cdot 2+1} + i^{2\cdot 6} = \left(i^2\right)^3\cdot i + \left(i^2\right)^6 = (-1)^3\cdot i + (-1)^6 = -1\cdot i + 1 = -i + 1$$

Örnek 3: $\dfrac{i\cdot\sqrt{-8}}{\sqrt{2}}$ ve $\dfrac{i^7 + i^{11}}{2i}$ ifadelerinin eşitlerini bulunuz.

Yanıt 3:

$$\frac{i\cdot\sqrt{-8}}{\sqrt{2}} = \frac{i\cdot\sqrt{i^2\cdot 8}}{\sqrt{2}} = \frac{i\cdot i\cdot 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{i^2\cdot 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{-1\cdot 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -2$$

$$\frac{i^7 + i^{11}}{2i} = \frac{\left(i^2\right)^3\cdot i + \left(i^2\right)^5\cdot i}{2i} = \frac{(-1)^3\cdot i + (-1)^5\cdot i}{2i} = \frac{-i - i}{2i} = \frac{-2i}{2i} = -1$$

Örnek 4: $P(z) = z^7 - z^5 + 3z^3 - 5z$ ise $P(i)$ nedir?

Yanıt 4:

$$P(i) = i^7 - i^5 + 3i^3 - 5i \quad\Rightarrow\quad P(i) = \left(i^2\right)^3\cdot i - \left(i^2\right)^2\cdot i + 3\left(i^2\right)\cdot i - 5i$$

$$\Rightarrow \quad P(i)=(-1)^3\cdot i-(-1)^2\cdot i+3(-1)\cdot i-5i$$
$$\Rightarrow \quad P(i)=-1\cdot i-(1)\cdot i-3\cdot i-5i$$
$$\Rightarrow \quad P(i)=-i-i-3i-5i$$
$$\Rightarrow \quad P(i)=-10i$$

Örnek 4: $n\in\mathbb{N}$ olmak üzere $A=i^{4n}+i^{4n+1}+i^{4n+2}+i^{4n+3}$ ifadesinin eşitini bulunuz.

Yanıt 4:

$$A=i^{4n}+i^{4n+1}+i^{4n+2}+i^{4n+3} \quad \Rightarrow \quad A=\left(i^2\right)^{2n}+\left(i^2\right)^{2n}\cdot i+\left(i^2\right)^{2n}\cdot i^2+\left(i^2\right)^{2n}\cdot i^3$$
$$\Rightarrow \quad A=(-1)^{2n}+(-1)^{2n}\cdot i+(-1)^{2n}\cdot i^2+(-1)^{2n}\cdot i^3$$
$$\Rightarrow \quad A=1+1\cdot i+1\cdot i^2+1\cdot i^3$$
$$\Rightarrow \quad A=1+i+i^2+i^3$$
$$\Rightarrow \quad A=1+i+(-1)+i^2\cdot i$$
$$\Rightarrow \quad A=1+i-1-i$$
$$\Rightarrow \quad A=0$$

Örnek 5: $Q=i\cdot i^2\cdot i^3\cdot i^4\cdots i^{23}$ ifadesinin eşitini bulunuz.

Yanıt 5:

$$Q=i\cdot i^2\cdot i^3\cdot i^4\cdots i^{23} \quad \Rightarrow \quad Q=i^{1+2+3+4+\cdots+23}$$
$$\Rightarrow \quad Q=i^{\frac{23\cdot(23+1)}{2}}$$
$$\Rightarrow \quad Q=i^{23\cdot 12}$$
$$\Rightarrow \quad Q=i^{276}$$
$$\Rightarrow \quad Q=\left(i^2\right)^{138}$$
$$\Rightarrow \quad Q=(-1)^{138}$$
$$\Rightarrow \quad Q=1$$

Örnek 5: ifadesinin eşitini bulunuz.

Yanıt 5:

Tanım (NORMAL BİÇİM veya CEBİRSEL BİÇİM)
$a+ib$ karmaşık sayısına (a,b) nin ***normal biçimi*** veya ***cebirsel biçimi*** denir.

Teorem
$\forall(a,b)\in\mathbb{C}$ ise $(a,b)=a+b\cdot i$

dir.

İspat:

$$(a,b) = (a,0)+(0,b)$$
$$= (a,0)+(0,1)\cdot(b,0)$$
$$= a+i\cdot b$$

Tanım (GERÇEL ve SANAL KISIM)

$z=a+ib$ karmaşık sayısındaki a sayısına ***gerçel kısım***, b sayısına ***sanal kısım*** denir.

$a=\mathrm{Ger}(z)$ ve $b=\mathrm{San}(z)$ biçiminde ifade edilir.

Örnek : $z=-3+5i$ karmaşık sayısının gerçel ve sanal kısımlarını bulunuz.

Yanıt :

Gerçel kısım : $\mathrm{Ger}(z)=-3$

Sanal kısım : $\mathrm{San}(z)=5$

Örnek : $z=\dfrac{-8-5i}{4}$ karmaşık sayısının gerçel ve sanal kısımlarını bulunuz.

Yanıt :

$z=\dfrac{-8-5i}{4} \quad\Rightarrow\quad z=-\dfrac{8}{4}-\dfrac{5}{4}i$

Gerçel kısım : $\mathrm{Ger}(z)=-\dfrac{8}{4}=-2$

Sanal kısım : $\mathrm{San}(z)=-\dfrac{5}{4}$

ALIŞTIRMALAR

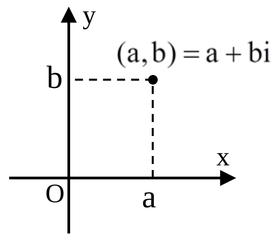
1. $\sqrt{-7}+\sqrt{-9}\cdot\sqrt{-8}$ ifadesinin eşiti nedir?
2. $i^{13}+i^{23}\cdot i^{8}$ ifadesinin eşiti nedir?
3. $i+i^3+i^5+\cdots+i^{39}+i^{41}$ ifadesinin eşiti nedir?
4. $\dfrac{i\cdot\sqrt{-32}+i^{13}\cdot\sqrt{-8}}{i\cdot\sqrt{2}+\sqrt{-18}}$ ifadesinin eşiti nedir?
5. $P(x)=x^8-4x^4+2x^2-5$ ise $P(i)$ nedir?
6. $n\in\mathbb{N}$ olmak üzere $A=i^{8n}+3i^{8n+1}+4i^{8n+3}$ ifadesinin eşiti nedir?
7. $n\in\mathbb{N}$ olmak üzere $A=\left(i^{8n}\right)^{2014}+\left(i^{8n+2}\right)^{2014}$ ifadesinin eşiti nedir?
8. $z=3+\sqrt{3}i$ karmaşık sayısının gerçel ve sanal kısımlarını bulunuz.
9. $z=-\dfrac{4}{5}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}i$ karmaşık sayısının gerçel ve sanal kısımlarını bulunuz.
10. $z=\sqrt{3}-\sqrt{3}i$ karmaşık sayısının gerçel ve sanal kısımlarını bulunuz.
11. $z=\left|-\dfrac{4}{5}\right|+\sqrt{\dfrac{3}{5}}i$ ise $\mathrm{Ger}(z)\cdot\mathrm{San}(z)$ nedir?
12. $z=-2+3i$ ise $\left(\mathrm{Ger}(z)\right)^{\mathrm{San}(z)}$ nedir?

1.9 Karmaşık Sayının Geometrik Gösterimi

Karmaşık sayılar kümesinin elemanları ile analitik düzlemin noktaları arasında,

$$a+bi \to (a,b)$$

biçiminde birebir ve örten eşlemesi kurulabilir. Böylece her karmaşık sayı için analitik düzlemde bir nokta karşılık gelir. Bu nokta karmaşık sayının geometrik gösterimidir. (Şekil 1)



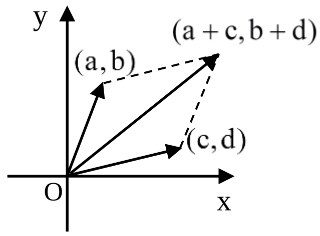
Şekil 1 Karmaşık sayı

Analitik düzlemin noktaları ile başlangıç noktası olan $(0,0)$ ile belirtilen yönlü doğru parçalarının belirttiği vektörler arasında birebir eşleme olduğundan

$$x+iy \leftrightarrow (x,y) \text{ vektörü}$$

arasında birebir eşleme yapılabilir. Bu durumda, (x,y) vektörü karmaşık sayısının bir geometrik gösterimi olmaktadır.

İki karmaşık sayının toplamına, bu karmaşık sayılara karşılık gelen vektörlerin toplamına karşılık geleceğinden, karmaşık sayıların geometrik olarak toplanması vektörlerde olduğu gibi paralelkenar kuralı gereğince yapılır. (Şekil 2)



Şekil 2 Vektör

Örnek 1: $z_1 = 2+2i$, $z_2 = 3+i$ ve $z_3 = 5+3i$ karmaşık sayılarının geometrik gösterimini yapınız.

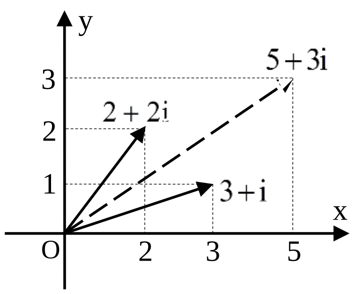
Yanıt 1:

$z_1 = 2+2i$,

$z_2 = 3+i$,

$z_3 = 5+3i$

Geometrik gösterimi Şekil 3 de verilmiştir.



Şekil 3 Geometrik Gösterim

ALIŞTIRMALAR

1. $z_1 = 3+4i$ ve $z_2 = 1+2i$ ise $z_1 + z_2$ karmaşık sayısının geometrik gösterimini yapınız.
2. $z_1 = 4+i$ ve $z_2 = 3+5i$ ise $z_1 + z_2$ karmaşık sayısının geometrik gösterimini yapınız.

1.10 Karmaşık Düzlem

Tanım (KARMAŞIK DÜZLEM)

Karmaşık sayılar kümesi ile birebir eşlenen düzleme ***karmaşık düzlem*** denir.

Tanım (EKSENLER)
Karmaşık düzlemde 0x-eksenine ***gerçel eksen***, 0y-eksenine ***sanal eksen*** denir.

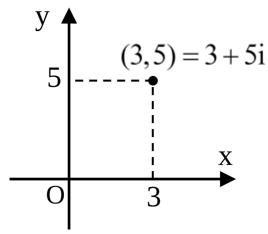
Örnek 1: $z=3+5i$ karmaşık sayısını karmaşık düzlemde gösteriniz.

Yanıt 1:
$z=3+5i$ olduğuna göre,

$Ger(z)=+3$

$San(z)=+5$

Buna göre, z karmaşık sayısı yandaki karmaşık düzlemde gösterilmiştir.



Şekil 4 Karmaşık Sayı

ALIŞTIRMALAR

1. $z=-13+5i$ karmaşık sayısını karmaşık düzlemde gösteriniz.
2. $z=9-15i$ karmaşık sayısını karmaşık düzlemde gösteriniz.

1.11 Bir Karmaşık Sayının Eşleniği

Tanım (KARMAŞIK SAYININ EŞLENİĞİ)
$x+iy$ bir karmaşık sayı ise $x-iy$ karmaşık sayına bu karmaşık sayının ***eşleniği*** denir ve $\bar{z}$ biçiminde gösterilir.

$z=x+iy$ karmaşık sayısı ile eşleniği olan $\bar{z}=x-iy$ karmaşık sayıları x-eksenine göre simetriktir.

Örnek 1: $z=3+5i$ karmaşık sayısının eşleniğini bulunuz.

Yanıt 1:
$z=3+5i \quad \Rightarrow \quad \bar{z}=\overline{3+5i}=3-5i$

Örnek 2: $z=3+5i$ ve $w=5+3i$ karmaşık sayıları için $\overline{z+w}$ yi bulunuz.

Yanıt 2:
$$\overline{z+w}=\overline{(3+5i)+(5+3i)}$$
$$=\overline{(3+5)+i(5+3)}$$
$$=\overline{8+8i}$$
$$=8-8i$$

Örnek 3: $z=3+5i$ ve $w=5+3i$ karmaşık sayıları için $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)}$ yi bulunuz.

Yanıt 3:

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \overline{\left(\frac{(3,5)}{(5,3)}\right)} = \overline{\left((3,5)\cdot(5,3)^{-1}\right)}$$

$$= \overline{\left((3,5)\cdot\left(\frac{5}{34},-\frac{3}{34}\right)\right)}$$

$$= \overline{\left(\frac{15+15}{34},\frac{-9+25}{34}\right)}$$

$$= \overline{\left(\frac{30}{34},\frac{16}{34}\right)} = \overline{\frac{15}{17}+\frac{8}{17}i}$$

$$= \frac{15}{17}-\frac{8}{17}i$$

ALIŞTIRMALAR

1. $z=-43-5i$ karmaşık sayısının eşleniğini bulunuz.
2. $z=6+4i$ ve $w=-5+13i$ karmaşık sayıları için $\overline{z+w}$ yi bulunuz.
3. $z=3+5i$ ve $w=5+3$ karmaşık sayıları için $\overline{z\cdot w}$ yi bulunuz.
4. $z=3+4i$ ve $w=4+3i$ karmaşık sayıları için $\overline{z:w}$ yi bulunuz.

1.11.1 İki Karmaşık Sayının Toplamının, Çarpımının ve Bölümünün Eşleniği

Aşağıdaki teoremde iki karmaşık sayının toplamının, çarpımının ve bölümünün eşleniği ile ilgili özelikler verilmiştir.

Teorem

$z,\ w \in \mathbb{C}$ olmak üzere

1. $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$
2. $\overline{z\cdot w}=\overline{z}\cdot\overline{w}$
3. $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{\overline{z}} \quad (z\neq 0)$
4. $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{w}} \quad (w\neq 0)$
5. $z+\overline{z}=2\cdot \mathrm{Ger}(z)$
6. $z-\overline{z}=2\cdot i\cdot \mathrm{San}(z)$

dir.

İspat:

$z=x+iy$ ve $w=u+iv$ olsun.

1. $\overline{z+w} = \overline{(x+iy)+(u+iv)}$
$= \overline{(x+u)+(iy+iv)}$
$= \overline{(x+u)+i(y+v)}$
$= (x+u)-i(y+v)$
$= x+u-iy-iv$
$= x-iy+u-iv$
$= \bar{z}+\bar{w}$

2. $\overline{z\cdot w} = \overline{(x+iy)\cdot(u+iv)}$
$= \overline{(xu-yv)+i(xv+yu)}$
$= (xu-yv)-i(xv+yu)$
$= xu-yv-ixv-iyu$
$= xu+i^2yv-ixv-iyu$
$= xu-ixv+i^2yv-iyu$
$= x(u-iv)-iy(-iv+u)$
$= (x-iy)(u-iv)$
$= \bar{z}\cdot\bar{w}$

3. $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \overline{\left(\frac{1}{x+iy}\right)}$
$= \overline{\left(\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}\right)}$
$= \frac{x}{x^2+y^2}+i\frac{y}{x^2+y^2}$

$\frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{\overline{x+iy}}$
$= \frac{1}{x-iy}$
$= \frac{x}{x^2+y^2}+i\frac{y}{x^2+y^2}$

4. $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \overline{\left(z\cdot\frac{1}{w}\right)}$
$= \bar{z}\cdot\overline{\left(\frac{1}{w}\right)}$
$= \bar{z}\cdot\frac{1}{\bar{w}}$
$= \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$

5. $z+\bar{z} = x+iy+\overline{x+iy}$
$= x+iy+x-iy$
$= 2x$
$= 2\cdot \text{Ger}(z)$

6. $z-\bar{z} = x+iy-\overline{x+iy}$
$= x+iy-(x-iy)$
$= x+iy-x+iy$
$= 2iy$
$= 2i\cdot \text{San}(z)$

Örnek 1: $z=3+4i$ ve $w=4-2i$ ise $\overline{z+w}$ sonucunu bulunuz.

Yanıt 1:
$\overline{z+w} = \overline{(3+4i)+(4-2i)}$
$= \overline{(3+4)+i(3-2)}$

$= \overline{7+i}$
$= 7-i$

Örnek 2: $z = 3+4i$ ve $w = 4-2i$ ise $\overline{z \cdot w}$ sonucunu bulunuz.

Yanıt 2:

$$\begin{aligned}
\overline{z\cdot w} &= \overline{(3+4i)\cdot(4-2i)} \\
&= \overline{(3\cdot 4 - 4\cdot(-2)) + (3\cdot(-2) + 4\cdot 4)i} \\
&= \overline{(12+8) + (-6+16)i} \\
&= \overline{20+10i} \\
&= 20-10i
\end{aligned}$$

Örnek 3: $z = 3+4i$ ise $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}$ sonucunu bulunuz.

Yanıt 3:

$$\begin{aligned}
\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} &= \overline{\left(\frac{1}{3+4i}\right)} \\
&= \frac{1}{3-4i} = \frac{1}{\underset{(3+4i)}{3-4i}} \\
&= \frac{3+4i}{3^2+4^2} = \frac{3+4i}{9+16} \\
&= \frac{3}{25} + \frac{4}{25}i
\end{aligned}$$

Örnek 4: $z = 3+4i$ ve $w = 4-2i$ ise $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)}$ sonucunu bulunuz.

Yanıt 4:

$$\begin{aligned}
\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} &= \overline{\left(\frac{3+4i}{4-2i}\right)} = \frac{\overline{3+4i}}{\overline{4-2i}} \\
&= \frac{3-4i}{4+2i} = \frac{3-4i}{\underset{(4-2i)}{4+2i}} \\
&= \frac{(3-4i)(4-2i)}{4^2+2^2} \\
&= \frac{(12-8)+(-6-16)i}{20} = \frac{4-22i}{20} = \frac{1}{5} - \frac{11}{10}i
\end{aligned}$$

Örnek 5: $z = 3+4i$ ise $z + \bar{z}$ sonucunu bulunuz.

Yanıt 5:

$z + \bar{z} = 2 \cdot \mathrm{Ger}(z)$ için $\mathrm{Ger}(z) = 3$ olduğundan

$z + \bar{z} = 2 \cdot 3 = 6$

Örnek 4: $z=3+4i$ ise $z-\bar{z}$ sonucunu bulunuz.

Yanıt 6:

$z-\bar{z}\ =2i\cdot San(z)$ ve $San(z)=4$ olduğundan

$z-\bar{z}\ =2i\cdot 4\ =8i$

ALIŞTIRMALAR

1. $z_1=3-2i$ ve $z_2=3+2i$ ise $\overline{z_1+z_2}$ ve $\overline{z_1}+\overline{z_2}$ değerlerini bulunuz.
2. $z_1=3-2i$ ve $z_2=3+2i$ ise $\overline{z_1\cdot z_2}$ ve $\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$ değerlerini bulunuz.
3. $z=3-2i$ $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}$ ve $\frac{1}{\bar{z}}$ değerlerini bulunuz.
4. $z_1=3-2i$ ve $z_2=3+2i$ ise $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$ ve $\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ değerlerini bulunuz.
5. $z=3-2i$ ise $z+\bar{z}$ ve $2\cdot Ger(z)$ değerlerini bulunuz.
6. $z=3-2i$ ise $z-\bar{z}$ ve $2\cdot i\cdot San(z)$ değerlerini bulunuz.

1.12 Bir Karmaşık Sayının Mutlak Değeri (Modülü)

Tanım (KARMAŞIK SAYILARIN MUTLAK DEĞERİ (MODÜLÜ))

$z=a+ib$ olmak üzere

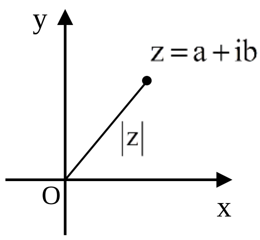
$$\sqrt{a^2+b^2}$$

gerçel sayısına $z=a+ib$ karmaşık sayısının ***mutlak değeri*** (modülü) denir ve $|z|$ biçiminde gösterilir.

Yukarıda verilen mutlak değer tanım Gerçel sayılar kümesindeki mutlak değer tanımının genişletilmiş halidir. Buna göre

$$|z|=|a+ib|\ =\sqrt{a^2+b^2}$$

dir. Bir karmaşık sayının mutlak değeri (modülü), karmaşık sayı ile karmaşık düzlemin başlangıç noktası arasındaki uzaklığı belirtir. (Şekil 5)



Şekil 5 Modül

Örnek 1: $z=3+2i$ ise z nin modülünü bulunuz.

Yanıt 1:

$z=3+2i$ ise $|z|=\sqrt{3^2+2^2}$

$=\sqrt{9+4}$

$=\sqrt{13}$

Örnek 1: $z=1-2i$ ise $|z|$ yi bulunuz.

Yanıt 1:

$z=1-2i$ ise $|z|=\sqrt{1^2+(-2)^2}$

$=\sqrt{1+4}$

$=\sqrt{5}$

Örnek 3: $z=i\cdot(3-4i)$ ise z nin modülünü bulunuz.

Yanıt 3:

$z=i\cdot(3-4i) \quad \Rightarrow \quad z=i\cdot 3-i\cdot 4i$

$\Rightarrow \quad z=3i-4i^2$

$\Rightarrow \quad z=4+3i$

$z=4+3i \quad \Rightarrow \quad |z|=\sqrt{4^2+3^2}$

$\Rightarrow \quad |z|=\sqrt{16+9}$

$\Rightarrow \quad |z|=5$

ALIŞTIRMALAR

1. $z=1-a\cdot i$ ve $|z|=4$ ise **a** yı bulunuz.

2. $|z|=\sqrt{x+y}$ ise z karmaşık sayısını x ve y türünden bulunuz.

1.12.1 Karmaşık Sayıların Mutlak Değeri İle İlgili Özelikler

Teorem

$z,\ w\in\mathbb{C}$ olmak üzere

1. $|z|=|\overline{z}|=|-z|$
2. $|z|^2=z\cdot\overline{z}$
3. $|z|\geq|Ger(z)|\geq Ger(z)$
4. $|z|\geq|San(z)|\geq San(z)$
5. $|z|\geq 0$
6. $|z|=0 \quad \Leftrightarrow \quad z=0$
7. $|z\cdot w|=|z|\cdot|w|$
8. $\left|\dfrac{z}{w}\right|=\dfrac{|z|}{|w|}$

İspat:

$z=x+iy$ ve $w=u+iv$ olmak üzere

1. $|z| = |x+iy| = \sqrt{x^2+y^2}$

$= \sqrt{x^2+(-y)^2}$

$= |x-iy| = |\bar{z}|$

$|z| = |x+iy| = \sqrt{x^2+y^2}$

$= \sqrt{(-x)^2+(-y)^2}$

$= |-x-iy| = |-(x+iy)| = |-z|$

2. $|z|^2 = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = x^2+y^2 = (x+iy)\cdot(x-iy) = z\cdot\bar{z}$

3. $|z| = \sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{x^2} = |x| = |\mathrm{Ger}(z)| \geq x \geq \mathrm{Ger}(z)$

4. $|z| = \sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{y^2} = |y| = |\mathrm{San}(z)| \geq y \geq \mathrm{San}(z)$

5. $|z| = \sqrt{x^2+y^2} \geq 0$

6. $|z|=0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2}=0 \Leftrightarrow x^2+y^2=0$

$\Leftrightarrow (x=0 \text{ ve } y=0)$

$\Leftrightarrow z=0+i\cdot 0$

$\Leftrightarrow z=0$

7. $|z\cdot w|^2 = \overline{(zw)}\cdot(zw) = (\bar{z}\cdot\bar{w})\cdot(zw) = (z\cdot\bar{z})\cdot(w\cdot\bar{w}) = |z|^2\cdot|w|^2$

olduğundan, her iki tarafın pozitif olmasından dolayı

$$\sqrt{|z\cdot w|^2} = \sqrt{|z|^2\cdot|w|^2}$$

karekökü alınırsa,

$$|z\cdot w| = |z|\cdot|w|.$$

8. $\left(\left|\frac{z}{w}\right|\right)^2 = \left(\frac{z}{w}\right)\cdot\overline{\left(\frac{z}{w}\right)}$

$= \frac{z}{w}\cdot\frac{\bar{z}}{\bar{w}} = \frac{z\cdot\bar{z}}{w\cdot\bar{w}}$

$= \frac{|z|^2}{|w|^2} = \left(\frac{|z|}{|w|}\right)^2$

olduğundan, her iki tarafın pozitif olmasından dolayı

$$\sqrt{\left(\left|\frac{z}{w}\right|\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{|z|}{|w|}\right)^2}$$

kareökü alınırsa,

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}.$$

Örnek 1: $z = a + bi$ ise $|\bar{z}|$ i bulunuz.

Yanıt 1:
$|\bar{z}| = |z|$ olduğundan $|\bar{z}| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$ dir.

Örnek 2: $z = 3 + 4i$ ise $z \cdot \bar{z}$ i bulunuz.

Yanıt 2:
$z \cdot \bar{z} = |z|^2$ olduğundan $z \cdot \bar{z} = |3 + 4i|^2 = \left(\sqrt{3^2 + 4^2}\right)^2 = \left(\sqrt{9 + 16}\right)^2 = \left(\sqrt{25}\right)^2 = 25$

Örnek 3: $z = 2 + 3i$ ve $w = 3 - 2i$ ise $|z \cdot w|$ i bulunuz.
Yanıt 3:
$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$ olduğundan

$$\begin{aligned} |z \cdot w| &= |2 + 3i| \cdot |3 - 2i| \\ &= \sqrt{2^2 + 3^2} \cdot \sqrt{3^2 + (-2)^2} \\ &= \sqrt{4 + 9} \cdot \sqrt{9 + 4} \\ &= \sqrt{13} \cdot \sqrt{13} = 13 \end{aligned}$$

Örnek 4: $z = 2 + 3i$ ve $w = 3 - 2i$ ise $\left|\frac{z}{w}\right|$ i bulunuz.

Yanıt 4:
$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$ olduğundan

$$\begin{aligned} \left|\frac{z}{w}\right| &= \frac{|2 + 3i|}{|3 - 2i|} = \frac{\sqrt{2^2 + 3^2}}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} \\ &= \frac{\sqrt{4 + 9}}{\sqrt{9 + 4}} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = 1 \end{aligned}$$

ALIŞTIRMALAR

1. $z=3+5i$ ise $|\bar{z}|$ yi bulunuz.
2. $z=3+5i$ ise $|-\bar{z}|$ yi bulunuz.
3. $z=3+5i$ ise $z\cdot\bar{z}$ yi bulunuz.
4. $z=3+5i$ ve $w=2-4i$ ise $|z\cdot w|$ yi bulunuz.
5. $z=3+5i$ ve $w=2-4i$ ise $|z:w|$ yi bulunuz.

1.13 Karmaşık Sayılar Kümesinde İşlemler

Karmaşık sayılar kümesindeki işlemler:

1. Toplama işlemi
2. Çıkarma işlemi
3. Çarpma işlemi
4. Bölme işlemi

1.13.1 Toplama

Tanım (TOPLAMA İŞLEMİ)
$z=a+ib$, $w=c+id$ karmaşık sayılarının toplamı

$$z+w=(a+c)+i(b+d)$$

dir.

Örnek 1: $z=3+4i$ ve $w=-5-6i$ ise $z+w$ toplamını bulunuz.

Yanıt 1:

$$\begin{aligned} z+w &= 3+4i+(-5-6i) \\ &= \left(3+(-5)\right)+\left(4+(-6)\right)i \\ &= \left(3-5\right)+\left(4-6\right)i \\ &= -2-2i \end{aligned}$$

Örnek 2: $p=-2+3i$ ve $r=5-6i$ ise $r+p$ toplamını bulunuz.

Yanıt 2:

$$\begin{aligned} z+w &= -2+3i+(5-6i) \\ &= \left(-2+5\right)+\left(3+(-6)\right)i \\ &= 3-3i \end{aligned}$$

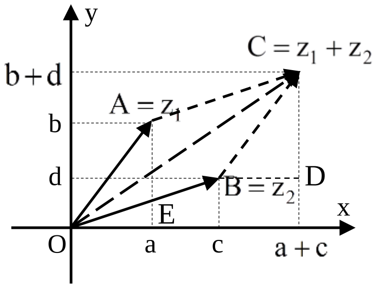
ALIŞTIRMALAR

1. $z=5-7i$ ve $w=7-8i$ ise $z+w$ toplamını bulunuz.
2. $z=-3-4i$ ve $w=3+4i$ ise $z+w$ toplamını bulunuz.

1.13.1.1 Toplama İşleminin Geometrik Yorumu

$z_1 = a + bi$ ve $z_2 = c + di$ karmaşık sayılarını ve $z_1 + z_2 = (a + c) + i(b + d)$ karmaşık sayısını düzlemde gösterelim.

Orijin ve bu karmaşık sayılar $A = z_1$, $B = z_2$ ve $C = z_1 + z_2$ birleştirilirse bir paralelkenar ortaya çıkar. Bu paralelkenar (Şekil 6) OACB dir. $[OC]$, paralelkenarın köşegenidir.



Şekil 6 Toplama İşlemi

$\overset{\Delta}{AOE} \cong \overset{\Delta}{CBD}$ olduğundan $|AE| = |CD| = b$ ve $|OE| = |BD| = a$ dır. Bu durumda C noktasının koordinatları $C(a + c, b + d)$ dir.

Buna göre C noktası

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$$

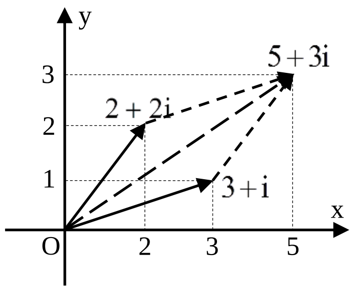
sayısının karmaşık düzlemdeki görüntüsüdür.

Örnek 1: $z_1 = 2 + 2i$ ve $z_2 = 3 + i$ ise $z_1 + z_2$ karmaşık sayısının geometrik gösterimini yapınız.

Yanıt 1:

$z_1 = 2 + 2i$ ve $z_2 = 3 + i$ ise

$$z_1 + z_2 = 2 + 2i + 3 + i = 5 + 3i$$



Şekil 7 Geometrik Gösterim

Geometrik gösterimi Şekil 7 de verilmiştir.

ALIŞTIRMALAR

1. $z_1 = -3 + i$ ve $z_2 = 5 - 3i$ ise $z_1 + z_2$ karmaşık sayının geometrik gösterimini yapınız.
2. $z_1 = 3 - i$ ve $z_2 = 5 + 8i$ ise $z_1 + z_2$ karmaşık sayının geometrik gösterimini yapınız.

1.13.1.2 Toplama İşleminin Özelikleri

Toplama işleminin özelikleri:

1. Kapalılık özeliği
2. Değişme özeliği
3. Birleşme özeliği
4. Birim eleman özeliği
5. Ters eleman özeliği

1.13.1.2.1 Kapalılık Özeliği

Tanım (KAPALILIK ÖZELİĞİ)
$z=a+ib$ ve $w=c+id$ karmaşık sayıları için

$$z+w = (a+c)+i(b+d) \in \mathbb{C}$$

olur. Karmaşık sayılar kümesinde toplama işleminin ***kapalılık özeliği*** vardır.

Örnek 1: $z=3+4i$ ve $w=-5-6i$ ise $z+w$ toplamını bulunuz.

Yanıt 1:

$$\begin{aligned} z+w &= 3+4i+(-5-6i) \\ &= \big(3+(-5)\big)+\big(4+(-6)\big)i \\ &= (3-5)+(4-6)i \\ &= -2-2i \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

olduğundan kapalıdır.

1.13.1.2.2 Değişme Özeliği

Tanım (DEĞİŞME ÖZELİĞİ)
$z=a+ib$ ve $w=c+id$ karmaşık sayıları için

$$z+w = (a+c)+i(b+d) = (c+a)+i(d+b) = w+z$$

dir. Karmaşık sayılar kümesinde toplama işleminin ***değişme özeliği*** vardır.

Örnek 1: $z=3+4i$ ve $w=-5-6i$ ise değişme özeliğini gösteriniz.

Yanıt 1:

$$\begin{aligned} z+w &= 3+4i+(-5-6i) \\ &= \big(3+(-5)\big)+\big(4+(-6)\big)i \\ &= -2-2i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w+z &= -5-6i+3+4i \\ &= (-5+3)+(-6+4)i \\ &= -2-2i \end{aligned}$$

olduğundan değişme özeliği vardır.

1.13.1.2.3 Birleşme Özeliği

Tanım (BİRLEŞME ÖZELİĞİ)
$z=a+ib$, $w=c+id$ ve $q=e+if$ karmaşık sayıları için

$$(z+w)+q = z+(w+q)$$

dir. Karmaşık sayılar kümesinde toplama işleminin ***birleşme özeliği*** vardır.

Örnek 1: $z=3+4i,\ w=-5-6i$ ve $q=1+i$ ise birleşme özeliğini gösteriniz.

Yanıt 1:

$$\begin{aligned}(z+w)+q &=\big(3+4i+(-5-6i)\big)+1+i\\ &=\big(3-5+(4-6)i\big)+1+i\\ &=(-2-2i)+1+i\\ &=(-2+1)+(-2+1)i\\ &=-1-i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z+\left(w+q\right) &=3+4i+\big((-5-6i)+1+i\big)\\ &=3+4i+\big((-5+1)+(-6+1)i\big)\\ &=3+4i+(-4-5i)\\ &=(3-4)+(4-5)i\\ &=-1-i\end{aligned}$$

olduğundan birleşme özeliği vardır.

1.13.1.2.4 Birim Eleman Özeliği

Tanım (BİRİM ELEMAN ÖZELİĞİ)

$z=a+ib$ karmaşık sayısı için

$$z+0=0+z=z$$

dir. Karmaşık sayılar kümesinde toplama işleminin ***birim eleman özeliği*** vardır ve 0 (sıfır) dır.

Örnek 1: $z=3+4i$ ise birim eleman özeliğini gösteriniz.

Yanıt 1:

$0=0+0i$ ve $z=3+4i$ olduğundan

$$\begin{aligned}z+0 &=3+4i+0+0i\\ &=(3+0)+(4+0)i\\ &=(0+3)+(0+4)i\\ &=0+0i+3+4i\\ &=0+z\\ &=z\end{aligned}$$

olduğundan birim eleman özeliği vardır ve 0 (sıfır) birim elemandır.

1.13.1.2.5 Ters Eleman Özeliği

Tanım (TERS ELEMAN ÖZELİĞİ)

$z=a+ib$ karmaşık sayısı için

$$z+(-z)=(-z)+z=0$$

dır. z karmaşık sayısının tersi $-z$ dir. Karmaşık sayılar kümesinde toplama işleminin ***ters eleman özeliği*** vardır.

Örnek 1: $z=3+4i$ ise ters eleman özeliğini gösteriniz.

Yanıt 1:
$z=3+4i$ ve $-z=-3-4i$ olduğundan

$$\begin{aligned} z+(-z) &= 3+4i+(-3-4i) \\ &= (3+(-3))+(4+(-4))i \\ &= ((-3)+3)+((-4)+4)i \\ &= (-3-4i)+3+4i \\ &= (-z)+z \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan ters eleman özeliği vardır ve z nin toplama işlemine göre ters elemanı $-z$ dir.

ALIŞTIRMALAR

1. $z=3+4i$ ve $q=1+i$ ise değişme özeliğini gösteriniz.
2. $z=-5+4i$, $w=-3-6i$ ve $q=2+3i$ ise birleşme özeliğini gösteriniz.
3. $w=3-5i$ ise birim eleman özeliğini gösteriniz.
4. $p=-2+7i$ ise ters eleman özeliğini gösteriniz.

1.13.2 Çıkarma

Tanım (ÇIKARMA İŞLEMİ)
$z=a+ib$, $w=c+id$ karmaşık sayılarının farkı

$$z-w = z+(-w) = (a-c)+i(b-d)$$

dir.

Örnek 1: $z=3+4i$ ve $w=-5-6i$ ise $z-w$ farkını bulunuz.

Yanıt 1:

$$\begin{aligned} z-w &= 3+4i-(-5-6i) \\ &= \left(3-(-5)\right)+\left(4-(-6)\right)i \\ &= \left(3+5\right)+\left(4+6\right)i \\ &= 8+10i \end{aligned}$$

Örnek 2: $z=-4+6i$ ve $w=15-8i$ ise $z-w$ farkını bulunuz.

Yanıt 2:

$$\begin{aligned} z-w &= -4+6i-(15-8i) \\ &= \left(-4-15\right)+\left(6-(-8)\right)i \\ &= \left(-19\right)+\left(6+8\right)i \\ &= -19+14i \end{aligned}$$

ALIŞTIRMALAR

1. $z=-13+44i$ ve $w=13-9i$ ise $z-w$ toplamını bulunuz.	2. $z=13+4i$ ve $w=9+13i$ ise $w-z$ toplamını bulunuz.

1.13.2.1 Çıkarma İşleminin Geometrik Yorumu

$z_1=a+bi$ ve $z_2=c+di$ karmaşık sayılarını ve $z_1-z_2=z_1+(-z_2)=(a-c)+i(b-d)$ karmaşık sayısını düzlemde gösterelim.

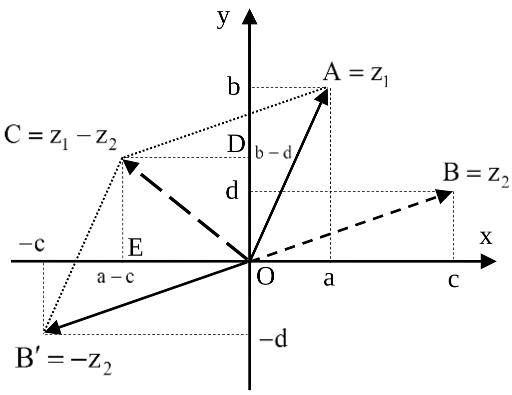
$z_2=c+di \quad \Rightarrow \quad -z_2=-c-di$

Orijin $A=z_1$, $B'=-z_2$ ve $C=z_1-z_2$ birleştirilirse bir paralelkenar ortaya çıkar. Bu paralelkenar (Şekil 8) $OACB'$ dir. $[OC]$, paralelkenarın köşegenidir

C noktasının koordinatları $(a-c,b-d)$ olmaktadır. Böylece, $z_1-z_2=(a-c,b-d)$ olur. Buna göre,

$$z_1-z_2=(a-c)+(b-d)i$$

olur.



Şekil 8 Çıkarma İşlemi

ALIŞTIRMALAR

1. $z=-13+44i$ ve $w=13-9i$ ise $z-w$ farkını geometrik olarak gösteriniz.	2. $z=13+4i$ ve $w=9+13i$ ise $w-z$ farkını geometrik olarak gösteriniz.

1.13.2.2 Çıkarma İşleminin Özelikleri

Çıkarma işleminin özelikleri:

1. Kapalılık özeliği

Karmaşık sayılar kümesinde çıkarma işleminin herhangi bir başka özeliği mevcut değildir.

1.13.2.2.1 Kapalılık Özeliği

Tanım (KAPALILIK ÖZELİĞİ)

$z=a+ib$ ve $w=c+id$ karmaşık sayıları için

$$z-w \in \mathbb{C}$$

dir. Karmaşık sayılar kümesinde çıkarma işleminin ***kapalılık özeliği*** vardır.

Örnek 1: $z=3+4i$ ve $w=-5-6i$ ise $z-w$ farkını bulunuz.

Yanıt 1:

$$\begin{aligned} z-w &= 3+4i-(-5-6i) \\ &= 3+4i+(5+6i) \\ &= (3+5)+(4+6)i \\ &= 8+10i \ \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

ALIŞTIRMALAR

1. $z=-13+4i$ ve $w=-8-6i$ ise $z-w$ farkını bulunuz.
2. $z=-3-24i$ ve $w=-11-58i$ ise $z-w$ farkını bulunuz.

1.13.3 Çarpma

Tanım (ÇARPMA İŞLEMİ)

$z=a+ib$, $w=c+id$ karmaşık sayılarının çarpımı

$$z\cdot w = (ac-bd)+i(ad+bc)$$

dir.

Örnek 1: $z=3+4i$ ve $w=-5-6i$ ise $z\cdot w$ çarpımını bulunuz.

Yanıt 1:

$$\begin{aligned} z\cdot w &= (3+4i)\cdot(-5-6i) \\ &= \big(3\cdot(-5)-4\cdot(-6)\big)+\big(3\cdot(-6)+4\cdot(-5)\big)i \\ &= \big(-15-(-24)\big)+\big(-18+(-20)\big)i \\ &= \big(-15+24\big)+\big(-18-20\big)i \\ &= 9-38i \end{aligned}$$

Örnek 2: $z=-2+3i$ ve $w=4+2i$ ise $z\cdot w$ çarpımını bulunuz.

Yanıt 2:

$$\begin{aligned} z\cdot w &= (-2+3i)\cdot(4+2i) \\ &= \big(-2\cdot 4-3\cdot 2\big)+\big(-2\cdot 2+3\cdot 4\big)i \\ &= \big(-8-6\big)+\big(-4+12\big)i \\ &= -14+8i \end{aligned}$$

ALIŞTIRMALAR

1. $z=4+3i$ ve $w=-6-5i$ ise $z\cdot w$ çarpımını bulunuz.
2. $v=-3+7i$ ve $w=5-3i$ ise $v\cdot z$ çarpımını bulunuz.
3. $q=-4+3i$ ve $r=-6+4i$ ise $r\cdot q$ ve $q\cdot r$ çarpımını bulunuz.
4. $t=7-5i$ ve $p=-3+9i$ ise $t\cdot p$ ve $p\cdot t$ çarpımını bulunuz.

1.13.3.1 Çarpma İşleminin Özelikleri

Çarpma işleminin özelikleri:

1. Kapalılık özeliği
2. Değişme özeliği
3. Birleşme özeliği
4. Birim eleman özeliği
5. Ters eleman özeliği
6. Dağılma özeliği

1.13.3.1.1 Kapalılık Özeliği

Tanım (KAPALILIK ÖZELİĞİ)

$z=a+ib$ ve $w=c+id$ karmaşık sayıları için

$$z\cdot w \ =(a+ib)\cdot(c+id) \ =(ac-bd)+i(ad+bc) \ \in\mathbb{C}$$

dir. Karmaşık sayılar kümesinde çarpma işleminin ***kapalılık özeliği*** vardır.

Örnek 1: $z=-6+4i$ ve $w=-5-6i$ ise $z\cdot w$ çarpımını bulunuz.

Yanıt 1:

$z=-6+4i$ ve $w=-5-6i$ olduğuna göre,

$$\begin{aligned} z\cdot w &=(-6+4i)\cdot(-5-6i) \\ &=\big(-6\cdot(-5)-4\cdot(-6)\big)+\big(-6\cdot(-6)+4\cdot(-5)\big)i \\ &=\big(30-(-24)\big)+\big(36+(-20)\big)i \\ &=\big(30+24\big)+\big(36-20\big)i \\ &=54+16i \ \in\mathbb{C} \end{aligned}$$

olduğundan kapalılık özeliği gösterilmiş olur.

1.13.3.1.2 Değişme Özeliği

Tanım (DEĞİŞME ÖZELİĞİ)

$z=a+ib$ ve $w=c+id$ karmaşık sayıları için

$$z\cdot w \ =w\cdot z$$

dir. Karmaşık sayılar kümesinde çarpma işleminin ***değişme özeliği*** vardır.

Örnek 1: $z=-6+4i$ ve $w=-5-6i$ ise değişme özeliğini gösteriniz.

Yanıt 1:

$$\begin{aligned} z\cdot w &= (-6+4i)\cdot(-5-6i) \\ &= \big(-6\cdot(-5)-4\cdot(-6)\big)+\big(-6\cdot(-6)+4\cdot(-5)\big)i \\ &= \big(30-(-24)\big)+\big(36+(-20)\big)i \\ &= (30+24)+(36-20)i \\ &= 54+16i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w\cdot z &= (-5-6i)\cdot(-6+4i) \\ &= \big(-5\cdot(-6)-(-6)\cdot 4\big)+\big(-5\cdot 4+(-6)\cdot(-6)\big)i \\ &= \big(30-(-24)\big)+\big(-20+36\big)i \\ &= (30+24)+(-20+36)i \\ &= 54+16i \end{aligned}$$

olduğundan değişme özeliği gösterilmiş olur.

1.13.3.1.3 Birleşme Özeliği

Tanım (BİRLEŞME ÖZELİĞİ)
$z=a+ib$, $w=c+id$ ve $q=e+if$ karmaşık sayıları için

$$(z\cdot w)\cdot q = z\cdot(w\cdot q)$$

dir. Karmaşık sayılar kümesinde çarpma işleminin ***birleşme özeliği*** vardır.

Örnek 1: $z=-6+4i$, $q=-7-4i$ ve $w=-5-6i$ ise birleşme özeliğini gösteriniz.

Yanıt 1:

$$\begin{aligned} (z\cdot w)\cdot q &= \big((-6+4i)\cdot(-5-6i)\big)\cdot(-7-4i) \\ &= (54+16i)\cdot(-7-4i) \\ &= -314-328i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z\cdot(w\cdot q) &= (-6+4i)\cdot\big((-5-6i)\cdot(-7-4i)\big) \\ &= (-6+4i)\cdot(11+62i) \\ &= -314-328i \end{aligned}$$

olduğundan birleşme özeliği gösterilmiş olur.

1.13.3.1.4 Birim Eleman Özeliği

Tanım (BİRİM ELEMAN ÖZELİĞİ)
$z=a+ib$ ve $w=1+i0$ karmaşık sayıları için

$$z\cdot w = w\cdot z = z$$

dir. $w=1$ olduğundan birim eleman 1 dir. Karmaşık sayılar kümesinde çarpma işleminin ***birim eleman özeliği*** vardır.

Örnek 1: $z=-6+4i$ ise birim eleman özeliğini gösteriniz.

Yanıt 1:
$z=-6+4i$ ve $w=1+i0$ olduğuna göre

$z\cdot w = (-6+4i)\cdot(1+0i)$	$w\cdot z = (1+0i)\cdot(-6+4i)$
$= (-6\cdot 1 - 4\cdot 0) + (-6\cdot 0 + 4\cdot 1)i$	$= (1\cdot(-6) - 0\cdot 4) + (1\cdot 4 + 0\cdot 4)i$
$= -6+4i$	$= -6+4i$

birim eleman özeliği gösterilmiştir.

1.13.3.1.5 Ters Eleman Özeliği

Tanım (TERS ELEMAN ÖZELİĞİ)
$z=a+ib$ ve $w=c+id$ karmaşık sayıları için

$$z\cdot w = w\cdot z = 1$$

dir. w karmaşık sayısı z karmaşık sayısının tersidir. Karmaşık sayılar kümesinde çarpma işleminin ***ters eleman özeliği*** vardır.

Örnek 1: $z=-6+4i$ ise ters elemanını bulunuz.

Yanıt 1:
$z=-6+4i$ karmaşık sayısının tersi $w=a+ib$ olsun.

$$z\cdot w = (-6+4i)\cdot(a+ib) = (-6a-4b)+(-6b+4a)i$$

$(-6a-4b)+(-6b+4a)i = 1$ olduğundan

$-6a-4b=1$ ve $-6b+4a=0$

$\Rightarrow \quad 6a+4b=-1$ ve $4a=6b$

$\Rightarrow \quad 6a+4b=-1$ ve $2a=3b$

$\Rightarrow \quad 6a+4b=-1$ ve $6a=9b$

$\Rightarrow \quad b=-\dfrac{1}{13}$ ve $a=-\dfrac{1}{26}$

$$w=-\frac{1}{26}-\frac{1}{13}i$$

$$w\cdot z = (a+ib)\cdot(-6+4i) = (-6a-4b)+(4a-6b)i$$

$=(-6a-4b)+(4a-6b)i = 1$ olduğundan,

$-6a-4b=1$ ve $4a-6b=0$

$\Rightarrow \quad 6a+4b=-1$ ve $4a=6b$

$\Rightarrow \quad 6a+4b=-1$ ve $2a=3b$

$\Rightarrow \quad 6a+4b=-1$ ve $6a=9b$

$\Rightarrow \quad b=-\dfrac{1}{13}$ ve $a=-\dfrac{1}{26}$

$$w=-\frac{1}{26}-\frac{1}{13}i$$

ALIŞTIRMALAR

1. $z=3-5i$ karmaşık sayının tersi olan karmaşık sayıyı bulunuz.
2. $z=-8+3i$ karmaşık sayının tersi olan karmaşık sayıyı bulunuz.

1.13.3.1.6 Dağılma Özeliği

Tanım (DAĞILMA ÖZELİĞİ)

$z=a+ib$, $w=c+id$ ve $q=e+if$ karmaşık sayıları için

$$z\cdot(w+q)=(w+q)\cdot z$$

dir. Karmaşık sayılar kümesinde çarpma işleminin toplama işlemi üzerine ***dağılma özeliği*** vardır.

Örnek 1: $z=-6+4i$, $q=-7-4i$ ve $w=-5-6i$ ise dağılma özeliğini gösteriniz.

Yanıt 1:

$$\begin{aligned}
z\cdot(w+q) &= (-6+4i)\cdot\left((-5-6i)+(-7-4i)\right)\\
&=(-6+4i)\cdot(-5-6i)+(-6+4i)\cdot(-7-4i)\\
&=(30+24)+(36-20)i+(42+16)+(24-28)i\\
&=54+16i+58-4i\\
&=112+12i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(w+q)\cdot z &= \left((-5-6i)+(-7-4i)\right)\cdot(-6+4i)\\
&=(-5-6i)\cdot(-6+4i)+(-7-4i)\cdot(-6+4i)\\
&=(30+24)+(36-20)i+(42+16)+(24-28)i\\
&=54+16i+58-4i\\
&=112+12i
\end{aligned}$$

dağılma özeliği gösterilmiş olur.

ALIŞTIRMALAR

1. $z=6+4i$, $q=1-i$ ve $w=5-6i$ karmaşık sayıları için $z\cdot(w+q)$ ve $z\cdot w+z\cdot q$ işlemlerini yapınız.
2. $z=6+4i$, $q=1-i$ ve $w=5-6i$ karmaşık sayıları için $(w+q)\cdot z$ ve $w\cdot z+q\cdot z$ işlemlerini yapınız.
3. $z=6+4i$, $q=1-i$ ve $w=5-6i$ karmaşık sayıları için $z\cdot(w+q+z)$ ve $z\cdot w+z\cdot q+z^2$ işlemlerini yapınız.
4. $z=6+4i$, $q=1-i$ ve $w=5-6i$ karmaşık sayıları için $(w+q+z)\cdot z$ ve $z\cdot w+z\cdot q+z^2$ işlemlerini yapınız.
5. $z=6+4i$, $q=1-i$, $r=5+2i$ ve $w=5-6i$ karmaşık sayıları için $z\cdot(w+q-r)$ ve $z\cdot w+z\cdot q-z\cdot r$ işlemlerini yapınız.
6. $z=6-4i$, $r=1-i$, $q=3-5i$ ve $w=-5-6i$ karmaşık sayıları için $z\cdot(w-q-r)$ ve $z\cdot w+z\cdot q-z\cdot r$ işlemlerini yapınız.

1.13.4 Bölme

Tanım (BÖLME İŞLEMİ)

$z=a+ib$, $w=c+id$ karmaşık sayılarının bölümü

$$\frac{z}{w}=z\cdot w^{-1}$$

dir.

1.13.4.1 Bölme İşleminin Özelikleri

Bölme işleminin özelikleri:

1. Kapalılık özeliği

Karmaşık sayılar kümesinde bölme işleminin herhangi bir başka özeliği mevcut değildir.

1.13.4.1.1 Kapalılık Özeliği

Tanım (KAPALILIK ÖZELİĞİ)
$z=a+ib$ ve $w=c+id \neq 0$ karmaşık sayıları için

$$\frac{z}{w}=z\cdot\frac{1}{w}=z\cdot w^{-1}\in\mathbb{C}$$

dir. Karmaşık sayılar kümesinde bölme işleminin ***kapalılık özeliği*** vardır.

ALIŞTIRMALAR

1. $z=6+4i$, $q=1-i$ ve $w=5-6i$ karmaşık sayıları için bölme işleminin kapalılık özeliğini gösteriniz.
2. $z=-6+4i$, $q=-1-i$, $r=1+i$ ve $w=3+6i$ karmaşık sayıları için bölme işleminin kapalılık özeliğini gösteriniz.

1.14 Karmaşık Düzlemde İki Karmaşık Sayı Arasındaki Uzaklık

Tanım (İKİ KARMAŞIK SAYI ARASINDAKİ UZAKLIK)
$z=x+iy$ ve $w=u+iv$ karmaşık sayıları için

$$|z-w|=\sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2}$$

değerine z karmaşık sayısı ile w karmaşık sayısı arasındaki ***uzaklık*** denir.

Örnek 1: $z=-3+5i$ ve $w=4+3i$ karmaşık sayıları arasındaki uzaklığı bulunuz.

Yanıt 1:
$z=-3+5i \Rightarrow A_z(-3,5)$
$w=4+3i \Rightarrow A_w(4,3)$

Uzaklık:

$$d=|z-w|=\sqrt{(-3-4)^2+(5-3)^2}=\sqrt{(-7)^2+(2)^2}=\sqrt{49+4}=\sqrt{53}$$

ALIŞTIRMALAR

1. $z_1=3+9i$ ve $z_2=4-2i$ ise $|z_1-z_2|$ ve $|z_2-z_1|$ değerlerini bulunuz.
2. $z_1=2-3i$, $z_2=3-5i$ ve $z_3=1+i$ ise $|z_1\cdot z_2-z_3|$ ve $|z_2\cdot z_3-z_1|$ değerlerini bulunuz.

1.14.1 $|z-z_0|=r$ Eşitliğine Uyan z Karmaşık Sayıların Kümesini Bulma

$|z-z_0|=r$ koşuluna uyan z karmaşık sayılarının kümesinin, z_0 sayısına uzaklığı r olan noktaların kümesidir. Bu küme merkezi z_0 ve yarıçapı r olan bir çemberdir.

$z=x+iy$, $z_0=a+ib$ ve $r\in\mathbb{R}^+$ olsun.

$$\begin{aligned}|z-z_0| &=|x+iy-(a+ib)| =|x-a+i(y-b)|\\ &=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\\ &=r\end{aligned}$$

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r \qquad \Rightarrow \qquad (x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

Bu denklem, Merkezi $M(a,b)$ ve yarıçapı r olan çember denklemidir.

Örnek 1: $|z-(1+i)|=3$ eşitliğine uyan z karmaşık sayısının kümesini ifade eden çember denklemini, çemberin merkezini ve yarıçap uzunluğunu bulunuz.

Yanıt 1:
$|z-(1+i)|=3$, bu eşitliğe göre çemberin merkezi $M(1,1)$ ve yarıçap $r=3$ dür.
Çember denklemi: $(x-1)^2+(y-1)^2=3^2$ dir.

Örnek 2: $|z-2+3i|=5$ eşitliğine uyan z karmaşık sayısının kümesini ifade eden çember denklemini, çemberin merkezini ve yarıçap uzunluğunu bulunuz.

Yanıt 2:
$|z-2+3i|=5$ ise $|z-(2-3i)|=5$, bu eşitliğe göre çemberin merkezi $M(2,-3)$ ve yarıçap $r=5$ dür.

Çember denklemi: $(x-2)^2+(y-(-3))^2=5^2$ ise $(x-2)^2+(y+3)^2=25$ dir.

ALIŞTIRMALAR

1. $|z+2-3i|=7$ eşitliğine uyan z karmaşık sayısının kümesini ifade eden çember denklemini, çemberin merkezini ve yarıçap uzunluğunu bulunuz.
2. $|z-5i|=5$ eşitliğine uyan z karmaşık sayısının kümesini ifade eden çember denklemini, çemberin merkezini ve yarıçap uzunluğunu bulunuz.

1.14.2 $|z-z_0|<r$ Eşitsizliğine Uyan z Karmaşık Sayıların Kümesini Bulma

$|z-z_0|<r$ koşuluna uyan z karmaşık sayılarının kümesi, z_0 sayısına uzaklığı r olan çemberin içidir.

$z = x + iy$, $z_0 = a + ib$ ve $r \in \mathbb{R}^+$ olsun.

$$\begin{aligned} |z - z_0| &= |x + iy - (a + ib)| = |x - a + i(y - b)| \\ &= \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \\ &< r \end{aligned}$$

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < r \quad \Rightarrow \quad (x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2$$

Bu denklem, Merkezi $M(a,b)$ ve yarıçapı r olan çember denkleminin iç bölgesidir.

Örnek 1: $|z - (2+3i)| < 5$ eşitsizliğine uyan karmaşık sayılarının kümesini, merkezini ve yarıçapını bulunuz.

Yanıt 1:
$z = x + yi$ olsun.

$|z - (2+3i)| < 5$ ise $\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} < 5$ ise $(x-2)^2 + (y-3)^2 < 25$

Merkez $M(2,3)$ ve yarıçap $r = 5$ dir.

ALIŞTIRMALAR

1. $\lvert z - 2 + 3i\rvert < 4$ eşitsizliğine uyan karmaşık sayılarının kümesini, merkezini ve yarıçapını bulunuz.	2. $\lvert z + 2 - 3i\rvert < 3$ eşitsizliğine uyan karmaşık sayılarının kümesini, merkezini ve yarıçapını bulunuz.

1.14.3 $|z - z_0| > r$ Eşitsizliğine Uyan z Karmaşık Sayıların Kümesini Bulma

$|z - z_0| > r$ koşuluna uyan z karmaşık sayılarının kümesi, z_0 sayısına uzaklığı r olan çemberin dışıdır.

$z = x + iy$, $z_0 = a + ib$ ve $r \in \mathbb{R}^+$ olsun.

$$\begin{aligned} |z - z_0| &= |x + iy - (a + ib)| = |x - a + i(y - b)| \\ &= \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \\ &> r \end{aligned}$$

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} > r \quad \Rightarrow \quad (x-a)^2 + (y-b)^2 > r^2$$

Bu denklem, Merkezi $M(a,b)$ ve yarıçapı r olan çember denkleminin dış bölgesidir.

Örnek 1: $|z - (2+3i)| > 5$ eşitsizliğine uyan karmaşık sayılarının kümesini, merkezini ve yarıçapını bulunuz.

Yanıt 1:
$z = x + yi$ olsun.

$|z-(2+3i)|>5$ ise $\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}>5$ ise $(x-2)^2+(y-3)^2>25$

Merkez $M(2,3)$ ve yarıçap $r=5$ dir.

ALIŞTIRMALAR

1. $|z-2+3i|>4$ eşitsizliğine uyan karmaşık sayılarının kümesini, merkezini ve yarıçapını bulunuz.

2. $|z+2-3i|>3$ eşitsizliğine uyan karmaşık sayılarının kümesini, merkezini ve yarıçapını bulunuz.

1.14.4 $|z-z_1|=|z-z_2|$ Eşitliğine Uyan z Karmaşık Sayıların Kümesini Bulma

$|z-z_1|=|z-z_2|$ koşuluna uyan z karmaşık sayılarının kümesi z_1 ve z_2 sayılarına eşit uzaklıkta bulunan noktaların kümesidir. Bu durum z_1 ile z_2 karmaşık sayılarını birleştiren doğru parçasının orta nokta dikmesini oluşturan bir doğru denklemidir.

$z=x+iy$, $z_1=a_1+ib_1$, ve $z_2=a_2+ib_2$ olsun.

$$|z-z_1| = |x+iy-(a_1+ib_1)| = |x-a_1+i(y-b_1)|$$

$$=\sqrt{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2}$$

$$|z-z_2| = |x+iy-(a_2+ib_2)| = |x-a_2+i(y-b_2)|$$

$$=\sqrt{(x-a_2)^2+(y-b_2)^2}$$

$$\begin{aligned}
|z-z_1|=|z-z_2| \quad &\Rightarrow \quad \sqrt{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2}=\sqrt{(x-a_2)^2+(y-b_2)^2}\\
&\Rightarrow \quad (x-a_1)^2+(y-b_1)^2=(x-a_2)^2+(y-b_2)^2\\
&\Rightarrow \quad x^2-2a_1x+a_1^2+y^2-2b_1y+b_1^2=x^2-2a_2x+a_2^2+y^2-2b_2y+b_2^2\\
&\Rightarrow \quad -2a_1x+a_1^2-2b_1y+b_1^2=-2a_2x+a_2^2-2b_2y+b_2^2\\
&\Rightarrow \quad -2a_1x+2a_2x-2b_1y+2b_2y=+a_2^2-a_1^2+b_2^2-b_1^2\\
&\Rightarrow \quad (2a_2-2a_1)x+(2b_2-2b_1)y+a_1^2-a_2^2+b_1^2-b_2^2=0
\end{aligned}$$

Bu denklem z_1 ve z_2 yi birleştiren doğru parçasının orta dikmesidir.

Örnek 1: $|z-i|=|z-3|$ eşitliğine uyan karmaşık sayılarının kümesini bulunuz.

Yanıt 1:
$z=x+iy$ olsun.

$$|z-i|=|z-3| \quad \Rightarrow \quad |z-(0+i)|=|z-(3+0i)|$$

$$\Rightarrow \quad |x+yi-(0+i)|=|x+yi-(3+0i)|$$

$$\Rightarrow \quad |(x-0)+(y-1)i| = |(x-3)+(y-0)i|$$

$$\Rightarrow \quad |(x-0)+(y-1)i| = |(x-3)+(y-0)i|$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{(x-0)^2+(y-1)^2} = \sqrt{(x-3)^2+(y-0)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{x^2+(y-1)^2} = \sqrt{(x-3)^2+y^2}$$
$$\Rightarrow \quad x^2+(y-1)^2 = (x-3)^2+y^2$$
$$\Rightarrow \quad x^2+y^2-2y+1 = x^2-6x+9+y^2$$
$$\Rightarrow \quad -2y+1 = -6x+9$$
$$\Rightarrow \quad 6x-2y-8 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 3x-y-4 = 0$$

Bu denklem i ve 3 karmaşık sayılarını birleştiren doğru parçasının orta dikmesidir.

ALIŞTIRMALAR

1. $|z-2i| = |z+3-2i|$ eşitliğine uyan karmaşık sayılarının kümesini bulunuz.
2. $|z-2-3i| = |z-2i|$ eşitliğine uyan karmaşık sayılarının kümesini bulunuz.

1.14.5 $|z-z_1|+|z-z_2|=k$ Eşitliğine Uyan z Karmaşık Sayıların Kümesini Bulma ($k \in \mathbb{R}$)

$|z-z_1|+|z-z_2|=k$ koşuluna uyan z karmaşık sayılarının kümesi, z_1 ve z_2 karmaşık sayılarına uzaklıkları toplamı k olan noktaların kümesidir. Bu küme ise odak noktaları z_1 ile z_2 karmaşık sayıları olan bir elips denklemidir.

Örnek 1: $|z-i|+|z-3|=2$ eşitliğine uyan karmaşık sayılarının kümesini bulunuz.

Yanıt 1:
$z = x+iy$ olsun.

ALIŞTIRMALAR

1. $|z-1|+|z+i|=1$ koşuluna uyan z karmaşık sayılarının kümesini bulunuz.
2. $|z-1|+|z+i|=1$ denklemi bir elips olduğuna göre, elipsin odaklarını bulunuz.
3. $|z-1+i|+|z+1+i|=1$ koşuluna uyan z karmaşık sayılarının kümesini bulunuz.
4. $|z-1+i|+|z+1+i|=1$ denklemi bir elips olduğuna göre, elipsin odaklarını bulunuz.

1.14.6 $|z-z_1|-|z-z_2|=k$ Eşitliğine Uyan z Karmaşık Sayıların Kümesini Bulma ($k \in \mathbb{R}$)

$|z-z_1|-|z-z_2|=k$ koşuluna uyan z karmaşık sayılarının kümesi, z_1 ve z_2 karmaşık sayılarına uzaklıkları farkı k olan noktaların kümesidir. Bu küme ise odak noktaları z_1 ile z_2 karmaşık sayıları olan bir hiperbol denklemidir.

ALIŞTIRMALAR

1. $|z-1|-|z+i|=1$ koşuluna uyan z karmaşık sayılarının kümesini bulunuz.
2. $|z-1|-|z+i|=1$ denklemi bir hiperbol olduğuna göre, hiperbolün odaklarını bulunuz.
3. $|z-1+i|-|z+1+i|=1$ koşuluna uyan z karmaşık sayılarının kümesini bulunuz.
4. $|z-1+i|-|z+1+i|=1$ denklemi bir hiperbol olduğuna göre, hiperbolün odaklarını bulunuz.

1.14.7 $|z-z_1|=k\cdot|z-z_2|$ Eşitliğine Uyan z Karmaşık Sayıların Kümesini Bulma $(1\neq k\in\mathbb{R})$

$|z-z_1|=k\cdot|z-z_2|$ koşuluna uyan z karmaşık sayılarının kümesi z_1 ve z_2 karmaşık sayılarına uzaklıkları oranı k olan noktaların kümesidir. Bu küme ise bir çemberin üzerindedir. Bu çembere Apolonyus çemberi denmektedir.

$z=x+iy$, $k\neq 1$, $z_1=a_1+ib_1$, ve $z_2=a_2+ib_2$ olsun.

$$|z-z_1| =|x+iy-(a_1+ib_1)| =|x-a_1+i(y-b_1)|$$
$$=\sqrt{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2}$$

$$|z-z_2| =|x+iy-(a_2+ib_2)|$$
$$=|x-a_2+i(y-b_2)|$$
$$=\sqrt{(x-a_2)^2+(y-b_2)^2}$$

$$|z-z_1|=k\cdot|z-z_2| \quad\Rightarrow\quad \sqrt{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2}=k\cdot\sqrt{(x-a_2)^2+(y-b_2)^2}$$
$$\Rightarrow\quad k=\frac{\sqrt{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2}}{\sqrt{(x-a_2)^2+(y-b_2)^2}}$$
$$\Rightarrow\quad k=\left(\frac{\sqrt{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2}}{\sqrt{(x-a_2)^2+(y-b_2)^2}}\right)^2$$
$$\Rightarrow\quad k=\frac{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2}{(x-a_2)^2+(y-b_2)^2}$$
$$\Rightarrow\quad (x-a_1)^2+(y-b_1)^2=k\left[(x-a_2)^2+(y-b_2)^2\right]$$
$$\Rightarrow\quad x^2-2a_1x+a_1^2+y^2-2b_1y+b_1^2=k\left[x^2-2a_2x+a_2^2+y^2-2b_2y+b_2^2\right]$$
$$\Rightarrow\quad x^2-2a_1x+a_1^2+y^2-2b_1y+b_1^2=kx^2-2ka_2x+ka_2^2+ky^2-2kb_2y+kb_2^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2-kx^2-2a_1x+2ka_2x+a_1^2-ka_2^2+y^2-ky^2-2b_1y+2kb_2y+b_1^2-kb_2^2=0$$
$$\Rightarrow \quad (1-k)x^2-2a_1(1-k)x+(1-k)a_2^2+(1-k)y^2-2b_1(1-k)y+(1-k)b_2^2=0$$
$$\Rightarrow \quad x^2-2a_1x+a_2^2+y^2-2b_1y+b_2^2=0$$
$$\Rightarrow \quad x^2+y^2-2a_1x-2b_1y+a_2^2+b_2^2=0$$

Bu noktalar, çember üzerindedir. Bu çembere Apolonyus çemberi denir.

Örnek 1: $|z-i|=2\cdot|z-1|$ eşitliğine uyan karmaşık sayıların kümesini bulunuz.

Yanıt 1:
$z=x+yi$ olsun.

$$|z-i|=2\cdot|z-1| \quad \Rightarrow \quad |x+yi-i|=2\cdot|x+yi-1|$$
$$\Rightarrow \quad \sqrt{x^2+(y-1)^2}=2\cdot\sqrt{(x-1)^2+y^2}$$
$$\Rightarrow \quad x^2+(y-1)^2=4\left((x-1)^2+y^2\right)$$
$$\Rightarrow \quad x^2+y^2-2y+1=4\cdot(x^2-2x+1+y^2)$$
$$\Rightarrow \quad x^2+y^2-2y+1=4x^2-8x+4+4y^2$$
$$\Rightarrow \quad 3x^2+3y^2-8x+2y+3=0$$
$$\Rightarrow \quad x^2+y^2-\frac{8}{3}x+\frac{2}{3}y+1=0$$
$$\Rightarrow \quad \left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\left(y+\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$$

Örnek 1: $|z+1-i|=2\cdot|z-i|$ eşitliğine uyan karmaşık sayıların kümesini bulunuz.

Yanıt 1:
$z=x+yi$ olsun.

$$|z+1-i|=2\cdot|z-i| \quad \Rightarrow \quad |x+yi+1-i|=2\cdot|x+yi-i|$$
$$\Rightarrow \quad \sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x)^2+(y-1)^2}$$
$$\Rightarrow \quad (x+1)^2+(y-1)^2=x^2+(y-1)^2$$
$$\Rightarrow \quad x^2+2x+1=x^2$$
$$\Rightarrow \quad 2x+1=0 \quad \Rightarrow \quad x=-\frac{1}{2}$$

ALIŞTIRMALAR

1. $|z+i|=3\cdot|z+1|$ eşitliğine uyan karmaşık sayıların kümesini bulunuz.

2. $|z-1+i|=\sqrt{2}\cdot|z-1+2i|$ eşitliğine uyan karmaşık sayıların kümesini bulunuz.

1.15 Cauchy – Schwarz Eşitsizliği

Teorem

$i\in\{1,2,3,\cdots,n\}$ için $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ olsun.

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$$

dir.

1.16 Üçgen Eşitsizlikleri

Teorem

$z, w\in\mathbb{C}$ olmak üzere

1. $|z+w|\le|z|+|w|$
2. $\big||z|-|w|\big|\le|z-w|$

İspat:

$z=x+iy$ ve $w=u+iv$ olsun.

1. $|z+w|^2 = |(x+u)+i(y+v)|^2$

$$=(x+u)^2+(y+v)^2$$
$$=(x^2+2xu+u^2)+(y^2+2yv+v^2)$$
$$=(x^2+y^2)+(u^2+v^2)+(2xu+2yv)$$
$$=(x^2+y^2)+(u^2+v^2)+2(xu+yv)$$

$$xu+yv\le\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{u^2+v^2}$$

$$|z+w|\le(x^2+y^2)+(u^2+v^2)+2\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{u^2+v^2}$$
$$\le\left(\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{u^2+v^2}\right)^2$$
$$\le\left(|z|+|w|\right)^2$$
$$|z+w|\le|z|+|w|$$

2. $|z| = |z+w-w| \le |z-w|+|w|$

dir. Buradan

$$|z|-|w|\le|z-w|$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$|w|-|z|\le|w-z|=|z-w|$$

elde edilerek

$$-|z-w|\le|z|-|w|\le|z-w|$$

bulunur. Buna göre,

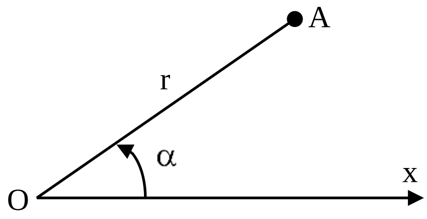
$$\big||z|-|w|\big|\le|z-w|$$

elde edilir.

1.17 Karmaşık Sayıların Kutupsal Koordinatları

Analitik düzlemde, herhangi bir A noktasının yeri (x, y) sıralı ikilisi ile belirtilir. Bunun gibi düzlemin noktaları kutupsal koordinatlar ile de belirtilebilir.

Düzlemde bir O noktası **başlangıç noktası**, Ox ekseni de **başlangıç ışını** olarak seçilirse O başlangıç noktasına, **kutup noktası**; Ox başlangıç ışınına da **kutup ekseni** veya **x-ekseni** denir. Ve böylece kutupsal koordinat sistemi oluşturulmuş olur.



1.17.1 Kutupsal Koordinat Sistemi

Tanım (KUTUPSAL KOORDİNAT SİSTEMİ)
Düzlemde bir kutup noktası ve bir kutup ekseninden oluşan koordinat sistemine ***kutupsal koordinat sistemi*** denir.

1.17.2 Kutupsal Koordinatlar

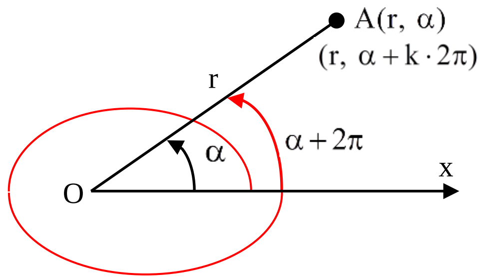
Tanım (KUTUPSAL KOORDİNATLAR)
Düzlemde bir A noktasının kutup noktasına olan uzaklığı $|OA| = r$ birim, xOA yönlü açısının ölçüsü $m(xOA) = \alpha$ ise $(r,\ \alpha)$ ikilisine, A noktasının ***kutupsal koordinatları*** denir.

A noktasının kutupsal koordinatları $(r,\ \alpha)$ ise r ye ***yarıçap bileşeni***; α ya ***açısal bileşen*** denir.

Bir A noktasının kutupsal koordinatları $(r,\ \alpha)$ ise bu nokta $(r,\ \alpha - 4\pi)$, $(r,\ \alpha - 2\pi)$, $(r,\ \alpha + 2\pi)$, $(r,\ \alpha + 4\pi)$, $\cdots$ ikililerin herhangi biri ile gösterilebilir.

$\forall k \in \mathbb{Z}$ için

$$(r,\ \alpha + k \cdot 2\pi)$$



Şekil 9 Kutup Ekseni

ikilisi de, $A(r,\ \alpha)$ noktasının kutupsal koordinatlarıdır. Kutupsal koordinat sisteminde, koordinat düzlemindeki herhangi bir noktasına birden çok kutupsal koordinat ikilisi eşlenebilir.

1.17.3 Karmaşık Sayının Argümenti (Genliği)

Tanım (KARMAŞIK SAYININ ARGUMENTİ (GENLİK))
Kutup ekseni ile z karmaşık sayısını başlangıç noktasına birleştiren ışın arasındaki pozitif yönlü açıya karmaşık sayının **argumenti** veya **genliği** denir. $\arg(z)$ biçiminde gösterilir.

Karmaşık sayıların, karmaşık düzlemde bir noktaya karşılık geldiğini biliyoruz. Bu noktayı, orijine birleştiren doğru parçasının gerçel eksenle pozitif yönde yaptığı açının, Trigonometri konusundaki esas ölçü kavramı ile karşılaştırınız.

Tanım (KARMAŞIK SAYININ ESAS ARGUMENTİ (GENLİĞİ))

$\forall k \in \mathbb{Z}$ için $(r,\ \alpha + k \cdot 2\pi)$ ikilisi, bir z karmaşık sayısının kutupsal koordinatları olmak üzere, kutupsal koordinatlardaki $-\pi < \alpha < \pi$ değerine karmaşık sayının **esas argument**i denir. Esas argument $\mathrm{Arg}(z)$ biçiminde gösterilir.

Argument ile esas argument arasında tanım gereği, herhangi bir z karmaşık sayısı için

$$\arg(z) = \mathrm{Arg}(z) + k \cdot 2\pi$$

bağıntısı vardır.

Şekil 10 deki kümeler ve $z = x + yi$ karmaşık sayısı için

$z \in [OA$ ise $\mathrm{Arg}(z) = 0$

$z \in B_1$ ise $\mathrm{Arg}(z) = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$

$z \in [OB$ ise $\mathrm{Arg}(z) = \dfrac{\pi}{2}$

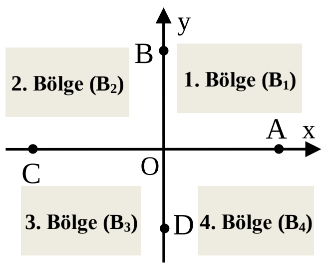
$z \in B_2$ ise $\mathrm{Arg}(z) = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) + \pi$

$z \in [OC$ ise $\mathrm{Arg}(z) = \pi$

$z \in B_3$ ise $\mathrm{Arg}(z) = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) - \pi$

$z \in [OD$ ise $\mathrm{Arg}(z) = -\dfrac{\pi}{2}$

$z \in B_4$ ise $\mathrm{Arg}(z) = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$



Şekil 10 Bölgeler

Örnek 1: $-1,\ 1,\ -i$, i ve $-1-i$ karmaşık sayılarının esas argumentlerini ve argumentlerini bulunuz. (Şekil 10 Bölgeler)

Yanıt 1:

-1 için $-1 \in [OC$ olduğundan, $\mathrm{Arg}(-1) = \pi$ ve $\arg(-1) = \pi + k \cdot 2\pi$

1 için $1 \in [OA$ olduğundan, $\mathrm{Arg}(1) = 0$ ve $\arg(1) = 0 + k \cdot 2\pi$

i için $i \in [OB$ olduğundan, $\mathrm{Arg}(i) = \dfrac{\pi}{2}$ ve $\arg(i) = \dfrac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$

$-i$ için $-1 \in [OD$ olduğundan, $\mathrm{Arg}(-i) = -\dfrac{\pi}{2}$ ve $\arg(-i) = -\dfrac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$

$-1-i$ için $-1 \in B_3$ olduğundan, $\mathrm{Arg}(-1-i) = -\dfrac{3\pi}{4}$ ve $\arg(-1-i) = -\dfrac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi$

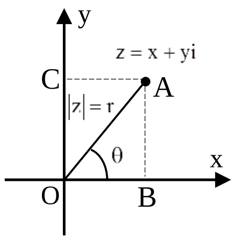
Not : Argument (genlik), periyodik eğrilerde ordinatların en büyüğü ile en küçüğü arasındaki farkın yarısıdır. Örneğin, $y = 2\sin(x)$ eğrisinin genliği 2 dir.

ALIŞTIRMALAR

1. $z=1+\sqrt{3}i$ karmaşık sayısının esas argumentini ve argumentini bulunuz.
2. $z=\sqrt{3}+i$ karmaşık sayısının esas argumentini ve argumentini bulunuz.
3. $z=-1+\sqrt{3}i$ karmaşık sayısının esas argumentini ve argumentini bulunuz.
4. $z=1-\sqrt{3}i$ karmaşık sayısının esas argumentini ve argumentini bulunuz.
5. $z=-1-\sqrt{3}i$ karmaşık sayısının esas argumentini ve argumentini bulunuz.
6. $z=-\sqrt{3}-i$ karmaşık sayısının esas argumentini ve argumentini bulunuz.

1.17.4 Bir Noktanın Kartezyen Koordinatları İle Kutupsal Koordinatları Arasındaki Bağıntılar

$z=x+yi$ olsun. $z=(x,y)$ biçiminde Kartezyen koordinatları olarak ifade edilir. z karmaşık sayısının kutupsal koordinatları da (r,θ) olsun. Bu durumda, bu iki ifade aynı karmaşık sayıyı göstereceğinden aşağıdaki bağıntılar oluşur. Yandaki şekli de inceleyiniz.



Şekil 11 Karmaşık Sayı

$\overset{\Delta}{AOB}$ üçgenin de,

$$\cos\theta=\frac{|OB|}{|OA|} \quad\Rightarrow\quad |OB|=|OA|\cos\theta \quad\Rightarrow\quad x=|z|\cos\theta \qquad (1)$$

$$\sin\theta=\frac{|AB|}{|OA|} \quad\Rightarrow\quad |AB|=|OA|\sin\theta \quad\Rightarrow\quad y=|z|\sin\theta \qquad (2)$$

$$\tan\theta=\frac{|AB|}{|OB|} \quad\Rightarrow\quad \tan\theta=\frac{y}{x} \qquad (3)$$

(1) ve (2) deki bağıntılar, $z=x+yi$ karmaşık sayısında değerleri yerine konulursa;

$$x=|z|\cos\theta \text{ ve } y=|z|\sin\theta \quad\Rightarrow\quad z=|z|\cos\theta+|z|\sin\theta\cdot i$$

$$\Rightarrow\quad z=|z|\cdot(\cos\theta+i\cdot\sin\theta)$$

Esas ölçü durumuna göre $\alpha=\theta+k\cdot 2\pi$ alınırsa,

$$\alpha=\theta+k\cdot 2\pi \quad\Rightarrow\quad z=|z|\cdot\left(\cos(\theta+k\cdot 2\pi)+i\cdot\sin(\theta+k\cdot 2\pi)\right)$$

elde edilir.

$z=|z|\cdot(\cos\theta+i\cdot\sin\theta)$ yerine kısaca $z=|z|\cdot \text{cis}\theta$ kullanılabilir.

1.18 Kutupsal Biçimdeki Karmaşık Sayılarla İşlemler

Kutupsal biçimdeki karmaşık sayılar ile yapılacak işlemler:

1. Toplama
2. Çıkarma
3. Çarpma
4. Bölme

1.18.1 Toplama

Kutupsal biçimdeki karmaşık sayıların toplama işlemi sayılar standart biçime yani $a+bi$ biçimine dönüştürülerek gerçekleştirilir.

Örnek 1: $z_1=\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ$ ve $z_2=\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ$ ise z_1+z_2 toplamını bulunuz.

Yanıt 1:
$z_1=\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ$ ve $z_2=\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ$ olduğuna göre,

$$\begin{aligned}
z_1+z_2 &=(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)+(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)\\
&=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\
&=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i\\
&=\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)i
\end{aligned}$$

ALIŞTIRMALAR

1. $z_1=2(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)$ ve $z_2=2(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)$ ise z_1+z_2 toplamını bulunuz.	2. $z_1=\cos 180^\circ+i\sin 180^\circ$ ve $z_2=\cos 90^\circ+i\sin 90^\circ$ ise z_1+z_2 toplamını bulunuz.

1.18.2 Çıkarma

Kutupsal biçimdeki karmaşık sayıların çıkarma işlemi sayılar standart biçime yani $a+bi$ biçimine dönüştürülerek gerçekleştirilir.

Örnek 1: $z_1=\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ$ ve $z_2=\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ$ ise z_1-z_2 farkını bulunuz.

Yanıt 1:

$z_1 = \cos 30^\circ + i\sin 30^\circ$ ve $z_2 = \cos 60^\circ + i\sin 60^\circ$ olduğuna göre,

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= (\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ) - (\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ) \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) + \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)i \end{aligned}$$

ALIŞTIRMALAR

1. $z_1 = 2(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)$ ve $z_2 = 2(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)$ ise $z_1 + z_2$ toplamını bulunuz.

2. $z_1 = \cos 180^\circ + i\sin 180^\circ$ ve $z_2 = \cos 90^\circ + i\sin 90^\circ$ ise $z_1 + z_2$ toplamını bulunuz.

1.18.3 Çarpma

İki karmaşık sayının çarpımını aşağıdaki teorem vermektedir.

Teorem

Herhangi iki karmaşık sayı $z_1 = |z_1| \cdot (\cos\theta + i \cdot \sin\theta)$ ve $z_2 = |z_2| \cdot (\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha)$ olsun.

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \big((\cos(\theta+\alpha) + i \cdot \sin(\theta+\alpha)\big)$$

dir.

İspat:

$z_1 = |z_1| \cdot (\cos\theta + i \cdot \sin\theta)$ ve $z_2 = |z_2| \cdot (\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha)$ karmaşık sayılarının çarpımı;

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= |z_1| \cdot (\cos\theta + i \cdot \sin\theta) \cdot |z_2| \cdot (\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha) \\ &= |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos\theta + i \cdot \sin\theta) \cdot (\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha) \\ &= |z_1| \cdot |z_2| \cdot \big((\cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha) + i \cdot (\cos\theta\sin\alpha + \sin\alpha\cos\theta)\big) \\ &= |z_1| \cdot |z_2| \cdot \big((\cos(\theta+\alpha) + i \cdot \sin(\theta+\alpha)\big) \end{aligned}$$

Örnek 1: $z_1 = \cos 30^\circ + i\sin 30^\circ$ ve $z_2 = \cos 60^\circ + i\sin 60^\circ$ ise $z_1 \cdot z_2$ çarpımını bulunuz.

Yanıt 1:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ) \cdot (\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ) \\ &= \big(\cos(30^\circ + 60^\circ) + i\sin(30^\circ + 60^\circ)\big) \\ &= \cos(90^\circ) + i\sin(90^\circ) \end{aligned}$$

Örnek 2: $z_1 = \cos 55^\circ + i\sin 55^\circ$ ve $z_2 = \cos 65^\circ + i\sin 65^\circ$ ise $z_1 \cdot z_2$ çarpımını bulunuz.

Yanıt 2:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (\cos 55^\circ + i\sin 55^\circ)\cdot(\cos 65^\circ + i\sin 65^\circ) \\ &= \left(\cos(55^\circ + 65^\circ) + i\sin(55^\circ + 65^\circ)\right) \\ &= \cos(120^\circ) + i\sin(120^\circ) \end{aligned}$$

1667-1754 yıllarında yaşamış Fransız asıllı İngiliz matematikçisi olan Abraham de Moivre, Karmaşık Analiz üzerine çalışmıştır. Abraham de Moivre'nin Karmaşık Analiz ile ilgili trigonometrik çalışmalarında en önemli teoremi aşağıda verilmiştir.

Teorem (De Moivre Formülü)

$n \in \mathbb{Z}^+$ ve $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ise

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

dir.

İspat:

Tümevarım yöntemi ile ispat yapılırsa,

$$\begin{aligned} n=1 &\quad\Rightarrow\quad z^1 = z \\ n=k &\quad\Rightarrow\quad z^k = r^k(\cos(k\theta) + i\sin(k\theta)) \\ n=k+1 &\quad\Rightarrow\quad z^{k+1} = r^{k+1}\left[\cos\left[(k+1)\theta\right] + i\sin\left[(k+1)\theta\right]\right] \\ &\quad\Rightarrow\quad z^{k+1} = z^k \cdot z^1 \\ &\quad\Rightarrow\quad z^{k+1} = r^k(\cos(k\theta) + i\sin(k\theta))\cdot r(\cos\theta + i\sin\theta) \\ &\quad\Rightarrow\quad z^{k+1} = r^{k+1}(\cos(k\theta) + i\sin(k\theta))\cdot(\cos\theta + i\sin\theta) \\ &\quad\Rightarrow\quad z^{k+1} = r^{k+1}\left[\cos\left[(k+1)\theta\right] + i\sin\left[(k+1)\theta\right]\right] \\ &\quad\Rightarrow\quad z^k \cdot z^1 = z^{k+1} \end{aligned}$$

Böylece ispat gerçekleştirilmiştir.

Örnek 3: $z = 3\left(\cos 110^\circ + i\sin 110^\circ\right)$ ise z^3 değerini bulunuz.

Yanıt 3:

$$\begin{aligned} z = 3\left(\cos 110^\circ + i\sin 110^\circ\right) &\quad\Rightarrow\quad z^3 = 3^3\left(\cos 110^\circ + i\sin 110^\circ\right)^3 \\ &\quad\Rightarrow\quad z^3 = 27\left(\cos(3\cdot 110^\circ) + i\sin(3\cdot 110^\circ)\right) \\ &\quad\Rightarrow\quad z^3 = 27\left(\cos(330^\circ) + i\sin(330^\circ)\right) \end{aligned}$$

Örnek 4: $z = \sqrt[6]{3}\left(\cos 310^\circ + i\sin 310^\circ\right)$ ise z^3 değerini bulunuz.

Yanıt 4:

$z=\sqrt[6]{3}\left(\cos 310^\circ + i\sin 310^\circ\right) \quad \Rightarrow \quad z^3=\left(\sqrt[6]{3}\right)^3\left(\cos 310^\circ + i\sin 310^\circ\right)^3$

$$\Rightarrow \quad z^3=\left(3^{\frac{1}{6}}\right)^3\left(\cos(3\cdot 310^\circ)+i\sin(3\cdot 310^\circ)\right)$$

$$\Rightarrow \quad z^3=3^{\frac{3}{6}}\left(\cos(930^\circ)+i\sin(930^\circ)\right)$$

$$\Rightarrow \quad z^3=3^{\frac{1}{2}}\left(\cos(210^\circ+720^\circ)+i\sin(210^\circ+720^\circ)\right)$$

$$\Rightarrow \quad z^3=\sqrt{3}\left(\cos(210^\circ)+i\sin(210^\circ)\right)$$

Teorem

$$z,\ w\in\mathbb{C} \text{ ve } n=\begin{cases} 1, & -2\pi < \operatorname{Arg}(z)+\operatorname{Arg}(w)\le \pi, \\ 0, & -\pi < \operatorname{Arg}(z)+\operatorname{Arg}(w)\le \pi, \\ -1, & \pi < \operatorname{Arg}(z)+\operatorname{Arg}(w)\le 2\pi, \end{cases}$$

olduğuna göre,

$$\operatorname{Arg}(z\cdot w)=\operatorname{Arg}(z)+\operatorname{Arg}(w)+n\cdot 2\pi$$

dir.

İspat:

$\operatorname{Arg}(z)=s$ ve $\operatorname{Arg}(w)=t$ olmak üzere, yukarıdaki ilk teoreme göre,

$$s+t,\ \ s+t+2\pi,\ \ s+t-2\pi$$

gerçel sayılarından her biri $z\cdot w$ çarpım karmaşık sayısının bir argumentidir.

$$-\pi<s\le\pi \ \text{ ve } \ -\pi<t\le\pi$$

olduğundan

$$-2\pi<s+t\le 2\pi$$

dir.

$s+t$; $\left(-2\pi,-\pi\right]$, $\left(-\pi,\pi\right]$ veya $\left(\pi,2\pi\right]$ aralıklarının birinde ve yalnız birinde yer alır.

$$\begin{array}{lll} -2\pi<s+t\le-\pi & \Rightarrow & -\pi<0<s+t+2\pi\le\pi \\ -\pi<s+t\le\pi & \Rightarrow & -\pi<s+t+0\le\pi \\ \pi<s+t\le2\pi & \Rightarrow & -\pi<s+t-2\pi<0<\pi \end{array}$$

olduğundan $s+t+2\pi$, $s+t$ veya $s+t-2\pi$ gerçel sayılarından biri ve yalnız biri $z\cdot w$ çarpımının asıl argumentidir. n nin tanımı göz önüne alındığında,

$$\operatorname{Arg}(z\cdot w)=\operatorname{Arg}(z)+\operatorname{Arg}(w)+n\cdot 2\pi$$

elde edilir.

Örnek 5: $z_1 = 2(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)$ ve $z_2 = 2(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)$ ise $\mathrm{Arg}(z_1 \cdot z_2)$ yi bulunuz.

Yanıt 5:
Siz yapınız.

Örnek 6: $z_1 = 2(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)$ ve $z_2 = 2(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)$ ise $\mathrm{Arg}(z_1 \cdot z_2)$ yi bulunuz.

Yanıt 6:
Siz yapınız.

ALIŞTIRMALAR

1. $z_1 = 2(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)$ ve $z_2 = 2(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)$ ise $z_1 \cdot z_2$ çarpımını bulunuz.
2. $z_1 = \cos 180^\circ + i\sin 180^\circ$ ve $z_2 = \cos 90^\circ + i\sin 90^\circ$ ise $z_1 \cdot z_2$ çarpımını bulunuz.
3. $z = \cos 180^\circ + i\sin 180^\circ$ ise z^5 değerini bulunuz.
4. $z = 5\left(\cos 10^\circ + i\sin 10^\circ\right)$ ise z^6 değerini bulunuz.
5. $z = \sqrt[6]{2}\left(\cos 18^\circ + i\sin 18^\circ\right)$ ise z^{12} değerini bulunuz.
6. $z_1 = 3(\cos 70^\circ + i\sin 70^\circ)$ ve $z_2 = 4(\cos 80^\circ + i\sin 80^\circ)$ ise $\mathrm{Arg}(z_1 \cdot z_2)$ yi bulunuz.
7. $z_1 = 4(\cos 123^\circ + i\sin 123^\circ)$ ve $z_2 = 7(\cos 280^\circ + i\sin 280^\circ)$ ise $\mathrm{Arg}(z_1 \cdot z_2)$ yi bulunuz.
8. $z_1 = 3\mathrm{cis}\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ ve $z_2 = 4\mathrm{cis}\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ ise $\mathrm{Arg}(z_1 \cdot z_2)$ yi bulunuz.
9. $z_1 = 5\mathrm{cis}\left(\dfrac{7\pi}{13}\right)$ ve $z_2 = 4\mathrm{cis}\left(\dfrac{5\pi}{8}\right)$ ise $\mathrm{Arg}(z_1 \cdot z_2)$ yi bulunuz.

1.18.4 Bölme

İki karmaşık sayının bölümünü aşağıdaki teorem vermektedir.

Teorem
Herhangi iki karmaşık sayı $z_1 = |z_1| \cdot (\cos\theta + i \cdot \sin\theta)$ ve $z_2 = |z_2| \cdot (\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha)$ olsun.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot \left(\cos(\theta - \alpha) + i \cdot \sin(\theta - \alpha)\right)$$

dir.

İspat:
$z_1 = |z_1| \cdot (\cos\theta + i \cdot \sin\theta)$ ve $z_2 = |z_2| \cdot (\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha) \neq 0$ karmaşık sayılarının bölümü;

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{|z_1|\cdot(\cos\theta+i\cdot\sin\theta)}{|z_2|\cdot(\cos\alpha+i\cdot\sin\alpha)}$$

$$=\frac{|z_1|}{|z_2|}\cdot\frac{(\cos\theta+i\cdot\sin\theta)}{(\cos\alpha+i\cdot\sin\alpha)}$$

$$=\frac{|z_1|}{|z_2|}\cdot\frac{(\cos\theta+i\cdot\sin\theta)}{\underbrace{(\cos\alpha+i\cdot\sin\alpha)}_{(\cos\alpha-i\cdot\sin\alpha)}}$$

$$=\frac{|z_1|}{|z_2|}\cdot\frac{(\cos\theta+i\cdot\sin\theta)\cdot(\cos\alpha-i\cdot\sin\alpha)}{(\cos\alpha+i\cdot\sin\alpha)\cdot(\cos\alpha-i\cdot\sin\alpha)}$$

$$=\frac{|z_1|}{|z_2|}\cdot\frac{(\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha)+i\cdot(\cos\theta\sin\alpha-\sin\theta\cos\alpha)}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}$$

$$=\frac{|z_1|}{|z_2|}\cdot\frac{(\cos(\theta-\alpha)+i\cdot\sin(\theta-\alpha)}{1}$$

$$=\frac{|z_1|}{|z_2|}\cdot\left(\cos(\theta-\alpha)+i\cdot\sin(\theta-\alpha)\right)$$

Örnek 1: $z_1=\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ$ ve $z_2=\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ$ ise $z_1:z_2$ bölümünü bulunuz.

Yanıt 1:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)}{(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)}$$

$$=\left(\cos(60^\circ-30^\circ)+i\sin(60^\circ-30^\circ)\right)$$

$$=\cos(30^\circ)+i\sin(30^\circ)$$

Örnek 2: $z_1=\cos 95^\circ+i\sin 95^\circ$ ve $z_2=\cos 65^\circ+i\sin 65^\circ$ ise $z_1:z_2$ bölümünü bulunuz.

Yanıt 2:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(\cos 95^\circ+i\sin 95^\circ)}{(\cos 65^\circ+i\sin 65^\circ)}$$

$$=\left(\cos(95^\circ-65^\circ)+i\sin(95^\circ-65^\circ)\right)$$

$$=\cos(30^\circ)+i\sin(30^\circ)$$

Teorem

$\mathrm{Arg}(z)=\theta$ olduğuna göre,

$$\mathrm{Arg}(z^{-1})=\begin{cases}\mathrm{Arg}(z), & \theta=\pi,\\ -\mathrm{Arg}(z), & \theta\neq\pi,\end{cases}$$

dir.

Teorem

$z, w\in\mathbb{C}$ karmaşık sayılarının her ikisi sıfırdan farklı ve n yukarıdaki teoremde tanımlanan tam sayı olduğuna göre,

$$\mathrm{Arg}\left(\frac{z}{w}\right)=\mathrm{Arg}(z)-\mathrm{Arg}(w)+n\cdot 2\pi$$

dir.

Teorem

$z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$ ve $n\in\mathbb{Z}^+$ olduğuna göre,

$$z^{-n}=|z|^{-n}\left[\cos(-n\cdot\theta)+i\sin(-n\cdot\theta)\right]$$

dir.

ALIŞTIRMALAR

1. $z_1=\cos 195^\circ+i\sin 195^\circ$ ve $z_2=\cos 165^\circ+i\sin 165^\circ$ ise $z_1:z_2$ bölümünü bulunuz.

2. $z_1=\cos 295^\circ+i\sin 295^\circ$ ve $z_2=\cos 70^\circ+i\sin 70^\circ$ ise $z_1:z_2$ bölümünü bulunuz.

1.19 Karmaşık Sayıların n. Dereceden Kökü

Tanım (KARMAŞIK SAYILARIN n. DERECEDEN KÖKÜ)

$z\in\mathbb{C}$ ve $n\in\mathbb{Z}^+$ olduğuna göre, $w^n=z$ denklemini gerçekleyen w karmaşık sayılarından her birine z nin ***n inci dereceden kökü*** denir. z nin n inci kuvvetten köklerinin kümesi $z^{1/n}$ ile gösterilir.

Teorem

Sıfırdan farklı bir karmaşık sayının n inci dereceden, birbirinden farklı n tane kökü vardır.

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olduğuna göre $k \in \{0,1,2,3,\cdots\}$ olmak üzere

$$z_k = |z|^{1/n} \cdot \left[\cos\left(\frac{\theta + k\cdot 2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + k\cdot 2\pi}{n}\right)\right]$$

eşitliği ile belli z_k karmaşık sayılarından her biri z nin n inci dereceden bir köküdür.

İspat:

$k \in \{0,1,2,3,\cdots\}$ olman üzere z_k karmaşık sayılarının argumentleri birbirinden farklı olduğundan bu karmaşık sayılar birbirinden farklıdır. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}(z_k)^n &= \left[|z|^{1/n}\right]^n \cdot \left[\cos\left(\frac{\theta + k\cdot 2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + k\cdot 2\pi}{n}\right)\right]^n \\ &= |z| \cdot (\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= z\end{aligned}$$

olduğundan, her bir z_k karmaşık sayısı z nin n inci dereceden bir köküdür.

İspatı tamamlamak için z nin n inci dereceden başka bir kökünün var olduğunu varsayarsak, bu sayıyı,

$$s \cdot (\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

ile gösterilsin. Buna göre,

$$s^n \cdot \left[\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)\right] = |z| \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)$$

yazılabilir. Bu durumda,

$$s \cdot (\cos\alpha + i\sin\alpha) = z_k$$

dır. Bu durum bir çelişkidir. Öyleyse, varsayım yanlıştır. Yani, z nin n inci dereceden farklı kökleri n tanedir.

Not : z karmaşık sayısının n. dereceden kökleri, merkezi analitik düzlemin başlangıç noktasında ve yarıçap uzunluğu $|z|^{1/n}$ olan çember içinde düzgün bir çokgen oluşturur.

Örnek 1: $z = 4 - 4i$ karmaşık sayısının üçüncü dereceden köklerini bulunuz.

Yanıt 1:

$z = 4 - 4i \;\Rightarrow\; |z| = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$

$$\text{Arg}(z) = \arctan\left(\frac{-4}{4}\right) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

$$z=4\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \quad z_k=\left(4\sqrt{2}\right)^{1/3}\left[\cos\left(\frac{-\frac{\pi}{4}+k\cdot 2\pi}{3}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{-\frac{\pi}{4}+k\cdot 2\pi}{3}\right)\right] \qquad k\in\mathbb{Z}$$

$k=0$ için $z_0=\left(4\sqrt{2}\right)^{1/3}\left[\cos\left(\frac{-\frac{\pi}{4}+0\cdot 2\pi}{3}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{-\frac{\pi}{4}+0\cdot 2\pi}{3}\right)\right]$

$$z_0=2^{5/6}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right]$$

$k=1$ için $z_1=\left(4\sqrt{2}\right)^{1/3}\left[\cos\left(\frac{-\frac{\pi}{4}+1\cdot 2\pi}{3}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{-\frac{\pi}{4}+1\cdot 2\pi}{3}\right)\right]$

$$z_1=2^{5/6}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right]$$

$k=2$ için $z_2=\left(4\sqrt{2}\right)^{1/3}\left[\cos\left(\frac{-\frac{\pi}{4}+2\cdot 2\pi}{3}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{-\frac{\pi}{4}+2\cdot 2\pi}{3}\right)\right]$

$$z_2=2^{5/6}\left[\cos\left(\frac{15\pi}{12}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{15\pi}{12}\right)\right]$$

ALIŞTIRMALAR

1. $z=4-4i$ karmaşık sayısının beşinci dereceden köklerini bulunuz.
2. $z=4-4i$ karmaşık sayısının onuncu dereceden köklerini bulunuz.

1.20 Karmaşık Sayıların Karekökü

$z=|z|\cdot[\cos(\theta+k\cdot 2\pi)+i\cdot\sin(\theta+k\cdot 2\pi)]$ ve kökler w_k, $k\in\mathbb{Z}$ olsun.

$$w_k=\sqrt{|z|}\cdot\left[\cos\left(\frac{\theta+k\cdot 2\pi}{2}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\theta+k\cdot 2\pi}{2}\right)\right] \qquad k\in\mathbb{Z}$$

$k=0$ için $w_0=\sqrt{|z|}\cdot\left[\cos\left(\frac{\theta+0\cdot 2\pi}{2}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\theta+0\cdot 2\pi}{2}\right)\right]$

$$w_0=\sqrt{|z|}\cdot\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

$k=1$ için $w_1=\sqrt{|z|}\cdot\left[\cos\left(\dfrac{\theta+1\cdot 2\pi}{2}\right)+i\cdot\sin\left(\dfrac{\theta+1\cdot 2\pi}{2}\right)\right]$

$$w_1=\sqrt{|z|}\cdot\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)\right]=-\sqrt{|z|}\cdot\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

Sonuçlar incelendiğinde görülecektir ki $w_1+w_0=0$ dir.

Örnek 1: $z=4-4i$ karmaşık sayısının kareköklerini bulunuz.

Yanıt 1:

$z=4-4i \quad\Rightarrow\quad |z|=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$

$\operatorname{Arg}(z)=\arctan\left(\dfrac{-4}{4}\right)=\arctan(-1)=-\dfrac{\pi}{4}$

$z=4\sqrt{2}\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\cdot\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$

$$\Rightarrow\quad z_k=\left(4\sqrt{2}\right)^{1/2}\left[\cos\left(\frac{-\frac{\pi}{4}+k\cdot 2\pi}{2}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{-\frac{\pi}{4}+k\cdot 2\pi}{2}\right)\right]\qquad k\in\mathbb{Z}$$

$k=0$ için $z_0=\left(4\sqrt{2}\right)^{1/2}\left[\cos\left(\dfrac{-\frac{\pi}{4}+0\cdot 2\pi}{2}\right)+i\cdot\sin\left(\dfrac{-\frac{\pi}{4}+0\cdot 2\pi}{2}\right)\right]$

$$z_0=2^{5/4}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)+i\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right]$$

$k=1$ için $z_1=\left(4\sqrt{2}\right)^{1/2}\left[\cos\left(\dfrac{-\frac{\pi}{4}+1\cdot 2\pi}{2}\right)+i\cdot\sin\left(\dfrac{-\frac{\pi}{4}+1\cdot 2\pi}{2}\right)\right]$

$$z_1=2^{5/4}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right)\right]$$

Örnek 2: $z=5+12i$ karmaşık sayısının kareköklerini bulunuz.

Yanıt 2:

$z=5+12i \quad\Rightarrow\quad |z|=\sqrt{5^2+12^2}=13$

$\operatorname{Arg}(z)=\arctan\left(\dfrac{12}{5}\right)$ bu değer bilinen bir açı değeri değildir. Bundan dolayı, w bir karmaşık sayı olmak üzere $z=w^2$ ve $w=x+yi$ olsun. Buna göre;

$z=w^2 \quad\Rightarrow\quad w^2=(x+yi)^2$

$\quad\Rightarrow\quad =x^2+2xyi+(yi)^2$

$$\Rightarrow \qquad = x^2 + 2xyi - y^2$$

$$z = 5 + 12i \text{ ve } w^2 = x^2 + 2xyi - y^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 2xyi - y^2 = 5 + 12i$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - y^2 = 5 \text{ ve } 2xy = 12$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - y^2 = 5 \text{ ve } y = \frac{6}{x}$$

$$y = \frac{6}{x} \text{ ve } x^2 - y^2 = 5 \quad \Rightarrow \quad x^2 - \left(\frac{6}{x}\right)^2 = 5$$

$$\Rightarrow \quad x^4 - 5x^2 - 36 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (x^2 - 9)(x^2 + 4) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 9 = 0 \text{ veya } x^2 + 4 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = \mp 3 \text{ veya } x^2 = -4$$

$$\Rightarrow \quad x = \mp 3 \text{ veya } x^2 = -4 \text{ için çözüm yoktur. Çünkü } x \in \mathbb{R}.$$

$$x = \mp 3 \quad \Rightarrow \quad y = \mp 2 \quad \Rightarrow \quad w_1 = 3 + 2i \text{ ve } w_2 = -3 - 2i$$

ALIŞTIRMALAR

1. $z = -1 + i\sqrt{3}$ karmaşık sayısının kareköklerini bulunuz.
2. $z = -1 - i\sqrt{3}$ karmaşık sayısının kareköklerini bulunuz.
3. $z = -\sqrt{3} - i\sqrt{3}$ karmaşık sayısının karekökleri bulunuz.
4. $z = -\sqrt{3} - i$ karmaşık sayısının kareköklerini bulunuz.

1.21 Karmaşık Sayıların Küp kökü

$z = |z| \cdot [\cos(\theta + k \cdot 2\pi) + i \cdot \sin(\theta + k \cdot 2\pi)]$ ve kökler w_k, $k \in \mathbb{Z}$ olsun.

$$w_k = \sqrt[3]{|z|} \cdot \left[\cos\left(\frac{\theta + k \cdot 2\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\theta + k \cdot 2\pi}{3}\right)\right] \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$k = 0 \text{ için} \quad w_0 = \sqrt[3]{|z|} \cdot \left[\cos\left(\frac{\theta + 0 \cdot 2\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\theta + 0 \cdot 2\pi}{3}\right)\right]$$

$$w_0 = \sqrt[3]{|z|} \cdot \left[\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\theta}{3}\right)\right]$$

$$k = 1 \text{ için} \quad w_1 = \sqrt[3]{|z|} \cdot \left[\cos\left(\frac{\theta + 1 \cdot 2\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\theta + 1 \cdot 2\pi}{3}\right)\right]$$

$$w_1 = \sqrt[3]{|z|} \cdot \left[\cos\left(\frac{\theta + 2\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\theta + 2\pi}{3}\right)\right]$$

$k=2$ için $\quad w_1 = \sqrt[3]{|z|}\cdot\left[\cos\left(\frac{\theta+2\cdot 2\pi}{3}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\theta+2\cdot 2\pi}{3}\right)\right]$

$$w_1 = \sqrt[3]{|z|}\cdot\left[\cos\left(\frac{\theta+4\pi}{3}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\theta+4\pi}{3}\right)\right]$$

Sonuçlar incelendiğinde görülecektir ki $w_0+w_1+w_2=0$ dir.

Örnek 1: $z=4-4i$ karmaşık sayısının küp köklerini bulunuz.

Yanıt 1:

$z=4-4i \quad \Rightarrow \quad |z|=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$

$\mathrm{Arg}(z)=\arctan\left(\frac{-4}{4}\right)=\arctan(-1)=-\frac{\pi}{4}$

$z=4\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

$$\Rightarrow \quad w_k=\sqrt[3]{\sqrt{2^5}}\cdot\left[\cos\left(\frac{-\frac{\pi}{4}+k\cdot 2\pi}{3}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{-\frac{\pi}{4}+k\cdot 2\pi}{3}\right)\right] \qquad k\in\mathbb{Z}$$

$k=0$ için $\quad w_0=2^{5/6}\cdot\left[\cos\left(\frac{-\frac{\pi}{4}+0\cdot 2\pi}{3}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{-\frac{\pi}{4}+0\cdot 2\pi}{3}\right)\right]$

$$w_0=2^{5/6}\cdot\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right]$$

$k=1$ için $\quad w_1=2^{5/6}\cdot\left[\cos\left(\frac{-\frac{\pi}{4}+1\cdot 2\pi}{3}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{-\frac{\pi}{4}+1\cdot 2\pi}{3}\right)\right]$

$$w_1=2^{5/6}\cdot\left[\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right]$$

$k=2$ için $\quad w_2=2^{5/6}\cdot\left[\cos\left(\frac{-\frac{\pi}{4}+2\cdot 2\pi}{3}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{-\frac{\pi}{4}+2\cdot 2\pi}{3}\right)\right]$

$$w_2=2^{5/6}\cdot\left[\cos\left(\frac{15\pi}{12}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{15\pi}{12}\right)\right]$$

$$w_2=2^{5/6}\cdot\left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right]$$

Örnek 2: $z=8i$ karmaşık sayısının küp köklerini bulunuz.

Yanıt 2:

$$z=8i \quad \Rightarrow \quad z=0+8i \quad \Rightarrow \quad z=8\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$z=8\cdot\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \quad w_k=\sqrt[3]{8}\cdot\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi}{3}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi}{3}\right)\right] \qquad k\in\mathbb{Z}$$

$k=0$ için $w_0=2\cdot\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+0\cdot 2\pi}{3}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+0\cdot 2\pi}{3}\right)\right]$

$$w_0=2\cdot\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$k=1$ için $w_1=2\cdot\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+1\cdot 2\pi}{3}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+1\cdot 2\pi}{3}\right)\right]$

$$w_1=2\cdot\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right]$$

$k=2$ için $w_2=2\cdot\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2\cdot 2\pi}{3}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2\cdot 2\pi}{3}\right)\right]$

$$w_2=2\cdot\left[\cos\left(\frac{9\pi}{6}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{9\pi}{6}\right)\right]$$

$$w_2=2\cdot\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right]$$

ALIŞTIRMALAR

1. $z=-8i$ karmaşık sayısının küp köklerini bulunuz.
2. $z=27i$ karmaşık sayısının küp köklerini bulunuz.
3. $z=8+8i$ karmaşık sayısının küp köklerini bulunuz.
4. $z=-27i$ karmaşık sayısının küp köklerini bulunuz.

1.22 Karmaşık Sayının Tamsayı Olmayan Kuvveti

Sıfırdan farklı herhangi bir z karmaşık sayısının tam sayı kuvveti daha önceki konularda verilmişti. Burada z karmaşık sayısının tam sayı olmayan kuvvetini tanımlıyoruz.

Tanım (KARMAŞIK SAYININ TAMSAYI OLMAYAN KUVVETİ)
$z \neq 0$, bir karmaşık sayı ve $w \in \mathbb{C}-\mathbb{Z}$ olmak üzere

$$\left\{e^{w\cdot\alpha} \middle| w \in \mathbb{C}-\mathbb{Z} \text{ ve } \alpha \in \ln(z)\right\}$$

kümesine ***z nin w inci kuvveti*** denir. z^w biçiminde gösterilir.

Tanım (ESAS DEĞER)
$z \neq 0$, bir karmaşık sayı ve w herhangi bir karmaşık sayı olmak üzere

$$e^{w\ln(z)}$$

karmaşık sayısına z^w nin ***esas değer***i denir. $A(z^w)$ biçiminde gösterilir.

Teorem
$w \in \mathbb{C}-\mathbb{Z}$ olmak üzere

$$z^w = \left\{e^{w\cdot \mathrm{Ln}(z)+n\cdot w\cdot i\cdot 2\pi} \middle| \right\}$$

dir.

1.23 Karmaşık Sayının Orijin Etrafında Döndürülmesi

Herhangi bir z karmaşık sayısının, Orijin etrafında pozitif yönde α açısı kadar döndürülmesi ile oluşan yeni karmaşık sayı $z\cdot(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ dir.

Herhangi bir z karmaşık sayısının, Orijin etrafında negatif yönde α açısı kadar döndürülmesi ile oluşan yeni karmaşık sayı $z\cdot\left(\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha)\right)$ dir.

Kural: Bir vektörü $\mp\alpha$ açısı kadar döndürmek için bu vektörün karmaşık sayı biçimini $\cos(\mp\alpha)+i\sin(\mp\alpha)$ ile çarpmak yeterlidir.

1.24 Polinom Denklem

Tanım (POLİNOM DENKLEM)
Katsayıları $\mathbb{C}$ den n inci dereceden bir polinom $P(x)$ olsun.

$$P(x)=0$$

denklemine ***polinom denklem***, n ye denklemin d***erecesi***, denklemi gerçekleyen her bir karmaşık sayıya denklemin ***kökü***, denklemin tüm köklerinin kümesine denklemin ***çözüm kümesi*** veya ***doğruluk kümesi*** denir.

Teorem
Katsayıları $\mathbb{C}$ den seçilen bir polinom denklemin en az bir kökü vardır.

1.25 Karmaşık Sayıların Üstel Şekli

Üstel fonksiyonlardan e^x fonksiyonunun Maclaurin serisine göre alçımı

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

dir. Bu açılımdan yaralanarak $z \in \mathbb{C}$ olmak üzere e^z nin değeri bulunacaktır.

Tanım (EULER FORMÜLÜ)
$z \in \mathbb{C}$ ve $z = x + iy$ olmak üzere

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$$

dir.

Teorem
$z \in \mathbb{C}$ ve $\arg(z) = \theta$ olduğuna göre $z = |z|e^{i\theta}$ dir.

İspat:
$\arg(z) = \theta$ olduğuna göre, $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ dır. Tanıma göre $\cos\theta + i\sin\theta$ yerine $e^{i\theta}$ yazılırsa,

$$z = |z|e^{i\theta}$$

Teorem
$z = x + iy$ olmak üzere

1. $|e^z| = e^x > 0$
2. $\arg(e^z) = b + k \cdot 2\pi$

dir.

İspat:
1. $$\begin{aligned} |e^z| &= |e^{x+iy}| \\ &= |e^x(\cos y + i\sin y)| \\ &= |e^x||\cos y + i\sin y| \\ &= |e^x| \cdot \sqrt{1} \\ &= |e^x| \\ &= e^x > 0 \end{aligned}$$

2. $|e^z| = e^x$ olduğundan, $e^z = |e^x|(\cos y + i\sin y)$ yazılabilir. Buna göre, y sayısı e^z nin bir argumentidir. Argument tanımına göre

$$\arg\left(e^z\right) = y + k \cdot 2\pi$$

dir.

Teorem

$z, w \in \mathbb{C}$ olmak üzere

1. $e^z \cdot e^w = e^{z+w}$
2. $\dfrac{1}{e^z} = e^{-z}$
3. $\dfrac{e^z}{e^w} = e^{z-w}$

dir.

İspat:

$z = x + yi$ ve $w = u + vi$ olsun.

1. $$\begin{aligned} e^z \cdot e^w &= e^{x+yi} \cdot e^{u+vi} \\ &= e^x(\cos y + i\sin y) \cdot e^u(\cos v + i\sin v) \\ &= e^x \cdot e^u \cdot (\cos y + i\sin y) \cdot (\cos v + i\sin v) \\ &= e^{x+u}\left[\cos(y+v) + i\sin(y+v)\right] \\ &= e^{x+u+i(y+v)} \\ &= e^{z+w} \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} \frac{1}{e^z} &= \frac{1}{e^{x+iy}} \\ &= \frac{1}{e^x(\cos y + i\sin y)} \\ &= \frac{1}{e^x} \cdot \frac{1}{\cos y + i\sin y} \\ &= e^{-x}\left[\cos(-y) + i\sin(-y)\right] \\ &= e^{-x-iy} \\ &= e^{-z} \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} \frac{e^z}{e^w} &= e^z \cdot \frac{1}{e^w} \\ &= e^z \cdot \frac{1}{e^w} \\ &= e^z \cdot e^{-w} \\ &= e^{z-w} \end{aligned}$$

Sonuç:

1. $e^{z+i2\pi} = e^z$
2. $z = |z| \cdot e^{i\theta}$ ve $w = |w| \cdot e^{i\alpha}$ ise $z \cdot w = |z| \cdot |w| \cdot e^{i(\theta+\alpha)}$
3. $z = |z| \cdot e^{i\theta}$ ve $w = |w| \cdot e^{i\alpha}$ ise $\dfrac{z}{w} = \dfrac{|z|}{|w|} \cdot e^{i(\theta-\alpha)}$

Teorem

$n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $(e^z)^n = e^{n \cdot z}$ dir.

İspat:
$z = x + yi$ olsun.

$$
\begin{aligned}
(e^z)^n &= (e^{x+iy})^n \\
&= \left[e^x(\cos y + i\sin y)\right]^n \\
&= e^{nx}(\cos ny + i\sin ny) \\
&= e^{nx+nyi} \\
&= e^{n(x+yi)} \\
&= e^{n\cdot z}
\end{aligned}
$$

Teorem
$z \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$e^z = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (n \in \mathbb{Z} \ \text{ve} \ z = n\cdot i\cdot 2\pi)$$

dir.

İspat:
$z = x + yi$ olsun.

$$
\begin{aligned}
(\Rightarrow):\ e^z = 1 \quad &\Rightarrow \quad e^x(\cos y + i\sin y) = 1 \\
&\Rightarrow \quad (e^x\cos y = 1 \ \text{ve} \ e^x \sin y = 0) \\
&\Rightarrow \quad (e^x\cos y = 1 \ \text{ve} \ \sin y = 0) \\
&\Rightarrow \quad (e^x\cos y = 1 \ \text{ve} \ k \in \mathbb{Z} \ \text{için} \ y = k\pi) \\
&\Rightarrow \quad (e^x\cos k\pi = 1 \ \text{ve} \ k \in \mathbb{Z}) \\
&\Rightarrow \quad (e^x(-1)^k = 1 \ \text{ve} \ k \in \mathbb{Z}) \\
&\Rightarrow \quad (k = 2n \ \text{ve} \ n \in \mathbb{Z} \ \text{ve} \ e^x = 1) \\
&\Rightarrow \quad (k = 2n \ \text{ve} \ n \in \mathbb{Z} \ \text{ve} \ x = 0) \\
&\Rightarrow \quad (z = 0 + iy \ \text{ve} \ y = k\pi, \ \text{ve} \ k = 2n \ \text{ve} \ n \in \mathbb{Z}) \\
&\Rightarrow \quad (z = i\cdot 2\pi\cdot n \ \text{ve} \ n \in \mathbb{Z}) \\
&\Rightarrow \quad (z = 2\pi\cdot i\cdot n \ \text{ve} \ n \in \mathbb{Z})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\Leftarrow):\ (n \in \mathbb{Z} \ \text{ve} \ z = 2\pi\cdot i\cdot n) \quad &\Rightarrow \quad e^z = e^{2\pi\cdot i\cdot n} \\
&\Rightarrow \quad e^z = \cos(2\pi\cdot n) + i\sin(2\pi\cdot n) \\
&\Rightarrow \quad e^z = 1
\end{aligned}
$$

Teorem
$e^z = e^w \Leftrightarrow (z - w = n\cdot i\cdot 2\pi \ \text{ve} \ n \in \mathbb{Z})$

İspat:

$(z-w=n\cdot i\cdot 2\pi \text{ ve } n\in\mathbb{Z}) \iff e^{z-w}=1$

$\iff e^{z}\cdot e^{-w}=1$

$\iff e^{z}=e^{w}$

dir.

Örnek 1: e^{i} karmaşık sayısını $x+yi$ biçiminde yazınız.

Yanıt 1:

$$
\begin{aligned}
e^{i} &= e^{0+i}\\
&= e^{0}\cdot(\cos 1+i\cdot\sin 1)\\
&= \cos 1+i\cdot\sin 1\\
&= \cos 1+i\cdot\sin 1\\
&= 0,999+i\cdot 0,017
\end{aligned}
$$

Örnek 2: $e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}$ karmaşık sayısını $x+yi$ biçiminde yazınız.

Yanıt 2:

$$
\begin{aligned}
e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)} &= e^{0+i\left(\frac{\pi}{2}\right)}\\
&= e^{0}\cdot\left(\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right)+i\cdot\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right)\\
&= 1\cdot(0+i\cdot 1)\\
&= i
\end{aligned}
$$

Örnek 3: $e^{i\cdot 300^\circ}$ karmaşık sayısını $x+yi$ biçiminde yazınız.

Yanıt 3:

$$
\begin{aligned}
e^{i\cdot 300^\circ} &= e^{0+i\cdot 300^\circ}\\
&= e^{0}\cdot(\cos 300^\circ+i\cdot\sin 300^\circ)\\
&= 1\cdot\left(\frac{1}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\
&= \frac{1}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}
$$

Örnek 3: $e^{z+i\cdot\pi}=-e^{z}$ olduğunu gösteriniz.

Yanıt 3:

$$\begin{aligned} e^{z+i\cdot\pi} &= e^{z}\cdot e^{i\cdot\pi} \\ &= e^{z}\cdot e^{0+i\cdot\pi} \\ &= e^{z}\cdot\left[e^{0}\cdot(\cos\pi+i\cdot\sin\pi)\right] \\ &= e^{z}\cdot\left[1\cdot(-1+i\cdot 0)\right] \\ &= -e^{z} \end{aligned}$$

ALIŞTIRMALAR

1. $e^{i\cdot\frac{\pi}{6}}$ karmaşık sayısını $x+yi$ biçiminde yazınız.
2. $e^{0}=1$ olduğunu gösteriniz.
3. $e^{2+3\pi i}=-e^{2}$ olduğunu gösteriniz.
4. $e^{z}=-2$ denkleminin $\mathbb{C}$ deki çözüm kümesini bulunuz.
5. $e^{2z-1}=1$ denkleminin $\mathbb{C}$ deki çözüm kümesini bulunuz.
6. $z=r\cdot e^{i\theta}$ olduğuna göre $\bar{z}=r\cdot e^{-i\theta}$ olduğunu gösteriniz.
7. $z=r\cdot e^{i\theta}$ olduğuna göre $z=e^{\ln(r)+i\theta}$ olduğunu gösteriniz.

1.26 Karmaşık Sayıların Logaritması

Teorem

$z\in\mathbb{C}-\{0\}$ olduğuna göre, $e^{w}=z$ denkleminin $\mathbb{C}$ deki çözüm kümesi,

$$\left\{\mathrm{Ln}|z|+i\cdot\arg(z)+2\pi\cdot i\cdot n \,\middle|\, n\in\mathbb{Z}\right\}$$

dir.

İspat:

$w_1=\mathrm{Ln}|z|+i\cdot\arg(z)$ olsun.

$$e^{w_1}=e^{\ln|z|+i\cdot\arg(z)}=e^{\ln|z|}\cdot e^{i\cdot\arg(z)}=|z|\cdot e^{i\cdot\arg(z)}=z$$

dir. Buna göre, w_1 karmaşık sayısı $e^{w}=z$ denkleminin bir çözümüdür. Eğer w_2 bu denklemin başka bir çözümü ise,

$$e^{w_1}=e^{w_2}$$

olur. Buna göre,

$$w_2-w_1=2\pi\cdot i\cdot n\,,\quad n\in\mathbb{Z} \qquad \text{(Teorem gereği)}$$

veya

$$w_2=w_1+2\pi\cdot i\cdot n\,,\quad n\in\mathbb{Z}$$

elde edilir. Buna göre,

$$w_2 = \mathrm{Ln}|z| + i\cdot \arg(z) + 2\pi\cdot i\cdot n, \quad n\in\mathbb{Z}$$

dir. Bu durumda, $e^w = z$ denkleminin çözüm kümesi,

$$\left\{\mathrm{Ln}|z| + i\cdot \arg(z) + 2\pi\cdot i\cdot n \,\middle|\, n\in\mathbb{Z}\right\}$$

dir.

Tanım (DOĞAL LOGARİTMA)

z, sıfırdan farklı bir karmaşık sayı olduğuna göre,

$$e^w = z$$

denkleminin çözüm kümesine z nin doğal logaritması denir. Bu kümenin,

$$\ln|z| + i\cdot \arg(z)$$

elemanına z nin logaritmasının asli değeri denir. z nin doğal logaritması $\ln(z)$ ile, logaritmasının asli değeri $\mathrm{Ln}(z)$ ile gösterilir.

Teorem

$$z\cdot w \neq 0 \text{ ve } n = \begin{cases} 1, & -2\pi < \arg(z)+\arg(w) < -\pi, \\ 0, & -\pi < \arg(z)+\arg(w) < \pi, \\ -1, & \pi < \arg(z)+\arg(w) < 2\pi, \end{cases}$$

olduğuna göre,

$$\mathrm{Ln}(z\cdot w) = \mathrm{Ln}(z) + \mathrm{Ln}(w) + 2\pi\cdot i\cdot n$$

dir.

İspat:

Logaritma tanımına göre,

$$\begin{aligned} \mathrm{Ln}(z\cdot w) &= \mathrm{Ln}|z\cdot w| + i\cdot \arg(z\cdot w) \\ &= \mathrm{Ln}\left(|z|\cdot|w|\right) + i\cdot\left[\arg(z)+\arg(w)+2\pi\cdot n\right] \\ &= \mathrm{Ln}|z| + \mathrm{Ln}|w| + i\cdot\arg(z) + i\cdot\arg(w) + 2\pi\cdot i\cdot n \\ &= \left[\mathrm{Ln}|z| + i\cdot\arg(z)\right] + \left[\mathrm{Ln}|w| + i\cdot\arg(w)\right] + 2\pi\cdot i\cdot n \\ &= \mathrm{Ln}(z) + \mathrm{Ln}(w) + 2\pi\cdot i\cdot n \end{aligned}$$

dir.

Örnek 1: $z = i$ olduğuna göre, $\mathrm{Ln}(z)$ yi bulunuz.

Yanıt 1:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ln}(z) &= \mathrm{Ln}(i)\\ &= \ln|i| + i\cdot \arg(i)\\ &= \ln(1) + i\cdot\frac{\pi}{2}\\ &= \frac{\pi}{2}\cdot i\end{aligned}$$

Örnek 2: $z=-i$ olduğuna göre, $\mathrm{Ln}(-i)$ yi bulunuz.

Yanıt 2:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ln}(z) &= \mathrm{Ln}(-i)\\ &= \left\{\mathrm{Ln}(-i) + 2\pi\cdot i\cdot n \,\middle|\, n\in\mathbb{Z}\right\}\\ &= \left\{\ln|-i| + i\cdot\arg(-i) + 2\pi\cdot i\cdot n \,\middle|\, n\in\mathbb{Z}\right\}\\ &= \left\{-\frac{\pi}{2}\cdot i + 2\pi\cdot i\cdot n \,\middle|\, n\in\mathbb{Z}\right\}\end{aligned}$$

Örnek 3: $z=1+i$ olduğuna göre, $\mathrm{Ln}(z)$ yi bulunuz.

Yanıt 3:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ln}(z) &= \mathrm{Ln}(1+i)\\ &= \ln|1+i| + i\cdot\arg(1+i)\\ &= \ln\left(\sqrt{2}\right) + i\cdot\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

Örnek 4: $z=1+\sqrt{3}i$ olduğuna göre, $\mathrm{Ln}(z)$ yi bulunuz.

Yanıt 4:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ln}(z) &= \mathrm{Ln}\left(1+i\cdot\sqrt{3}\right)\\ &= \ln\left|1+i\cdot\sqrt{3}\right| + i\cdot\arg\left(1+i\cdot\sqrt{3}\right)\\ &= \ln 2 + i\cdot\frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

ALIŞTIRMALAR

1. $z=\sqrt{3}-i$ olduğuna göre $\mathrm{Ln}(z)$ yi bulunuz.	3. $z=-\sqrt{3}+i$ olduğuna göre $\mathrm{Ln}(z)$ yi bulunuz.
2. $z=2i$ olduğuna göre $\mathrm{Ln}(z)$ yi bulunuz.	4. $z=2+2i$ olduğuna göre $\mathrm{Ln}(z)$ yi bulunuz.

Notlar: